

Propagador Escalar e Causalidade

Sandro Vitenti

Table of contents

1	Introdução	2
2	Revisão: Construção do Propagador	2
2.1	Definição do Propagador	2
2.2	Decomposição de Fourier	2
2.3	O Propagador como Transformada de Fourier	2
3	Cálculo Explícito do Propagador	3
3.1	Substituição dos Modos de Fourier	3
3.2	Integração Angular	3
3.3	Integral Radial e a Delta de Dirac	3
3.4	Resultado Final: Propagador Causal	3
4	Interpretação Física: Causalidade	4
4.1	Propagação na Velocidade da Luz	4
4.2	O Cone de Luz Futuro	4
5	Generalização para Fontes Estendidas	4
5.1	Linhas de Mundo	4
5.2	Potencial de uma Carga em Movimento	4
5.3	O Princípio da Ação a Distância (Retardada)	5
6	Conexão com a Eletrostática	5
6.1	O Limite Estático	5
6.2	A Ilusão da Ação Instantânea	5
7	Visualização do Propagador	5
8	Resumo dos Conceitos-Chave	7
9	Exercícios	8
9.1	Exercício 1	8
9.2	Exercício 2	8
9.3	Exercício 3	8
9.4	Exercício 4	8
9.5	Exercício 5	8
9.6	Exercício 6	9
9.7	Exercício 7	9
9.8	Exercício 8	9
9.9	Exercício 9	9
9.10	Exercício 10	9
9.11	Exercício 11	9
9.12	Exercício 12	9

1 Introdução

Nesta aula, finalizamos a construção do **propagador escalar** no espaço-tempo, obtendo sua forma explícita e discutindo suas implicações físicas. O objetivo principal é entender como um distúrbio localizado se propaga no campo e como isso se relaciona com a **causalidade** e com o potencial eletrostático.

Os tópicos abordados são:

1. Revisão da construção do propagador a partir da decomposição de Fourier.
2. Cálculo explícito do propagador no espaço-tempo.
3. Interpretação causal: propagação na velocidade da luz.
4. Generalização para fontes estendidas (linhas de mundo).
5. Conexão com o potencial eletrostático e a questão da ação instantânea.

2 Revisão: Construção do Propagador

2.1 Definição do Propagador

O propagador escalar, que denotamos por $\phi_J(x)$, é a solução da equação de onda com uma fonte pontual:

$$\square\phi_J(x) = \delta^4(x - x_0) \quad \text{com} \quad \phi_J(x) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty$$

onde $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o operador d'Alembertiano (ou operador de onda).

Na notação relativística, com $x^0 = ct$, o operador é $\square = \partial_\mu \partial^\mu$.

2.2 Decomposição de Fourier

O propagador é construído como uma superposição de modos de Fourier, que são soluções da equação de onda homogênea. Para cada modo com vetor de onda \mathbf{k} , a solução geral é uma combinação linear de ondas planas:

$$\phi_{\mathbf{k}}(t) = N_k (e^{-ikt} + \mathcal{M}_k e^{ikt})$$

onde $k = |\mathbf{k}|$ e N_k é uma constante de normalização.

A escolha das condições de contorno (causalidade) seleciona apenas um dos modos. A condição $\phi_J(x) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ implica que $\mathcal{M}_k = 0$, ou seja, apenas o modo de frequência positiva (viajando para o futuro) contribui.

A normalização dos modos de Fourier é fixada pela condição de completudeza:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \phi_{\mathbf{k}}(t) \phi_{\mathbf{k}'}^*(t) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

que leva a:

$$N_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$$

2.3 O Propagador como Transformada de Fourier

Com as soluções modais, o propagador pode ser escrito como:

$$\phi_J(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{x^0} dx'^0 [\phi_{\mathbf{k}}(x^0) \phi_{\mathbf{k}'}^*(x'^0) - \phi_{\mathbf{k}'}^*(x^0) \phi_{\mathbf{k}}(x'^0)] J(x')$$

onde $J(x') = -\delta^4(x' - x_0)$ para uma fonte pontual. Esta expressão é a base para o cálculo do propagador no espaço-tempo.

3 Cálculo Explícito do Propagador

3.1 Substituição dos Modos de Fourier

Substituindo as expressões para $\phi_{\mathbf{k}}(t)$ e $\phi_{\mathbf{k}}^*(t)$, e usando a fonte pontual $J(x') = -\delta^4(x' - x_0)$, obtemos a integral:

$$\phi_J(x) = i\Theta(x^0 - x_0^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \left[e^{ik(x^0 - x_0^0) + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} - e^{-ik(x^0 - x_0^0) - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} \right]$$

onde Θ é a função degrau de Heaviside.

3.2 Integração Angular

Vamos agora realizar a integração angular. Escrevendo $d^3k = k^2 dk d\Omega$ e escolhendo o sistema de coordenadas com o eixo z ao longo do vetor $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, temos $\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{x} = k|\Delta\mathbf{x}| \cos\theta$. A integral angular é:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{\pm ik|\Delta\mathbf{x}| \cos\theta} = 4\pi \frac{\sin(k|\Delta\mathbf{x}|)}{k|\Delta\mathbf{x}|}$$

Este é um resultado fundamental: a integral angular transforma a onda plana em uma onda esférica, expressa pelo fator $\sin(k|\Delta\mathbf{x}|)/(k|\Delta\mathbf{x}|)$.

3.3 Integral Radial e a Delta de Dirac

Substituindo o resultado da integração angular, ficamos com:

$$\phi_J(x) = \frac{i\Theta(\Delta x^0)}{2\pi^2|\Delta\mathbf{x}|} \int_0^\infty dk e^{ik\Delta x^0} \sin(k|\Delta\mathbf{x}|)$$

onde definimos $\Delta x^0 = x^0 - x_0^0$ e $|\Delta\mathbf{x}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$. Agora, escrevemos o seno como combinação de exponenciais:

$$\sin(k|\Delta\mathbf{x}|) = \frac{e^{ik|\Delta\mathbf{x}|} - e^{-ik|\Delta\mathbf{x}|}}{2i}$$

e estendemos a integral para todo o eixo real, notando que o integrando é uma função par:

$$\int_0^\infty dk e^{ik(\Delta x^0 \pm |\Delta\mathbf{x}|)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(\Delta x^0 \pm |\Delta\mathbf{x}|)}$$

Usando a definição da delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^\infty dk e^{ika} = 2\pi\delta(a)$$

obtemos:

$$\phi_J(x) = \frac{\Theta(\Delta x^0)}{4\pi|\Delta\mathbf{x}|} [\delta(\Delta x^0 + |\Delta\mathbf{x}|) - \delta(\Delta x^0 - |\Delta\mathbf{x}|)]$$

3.4 Resultado Final: Propagador Causal

Como $\Theta(\Delta x^0)$ seleciona apenas $\Delta x^0 > 0$, o primeiro termo com $\delta(\Delta x^0 + |\Delta\mathbf{x}|)$ nunca contribui (pois o argumento é positivo). Portanto, o propagador causal é:

$$\boxed{\phi_J(x) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \delta(\Delta x^0 - |\Delta\mathbf{x}|)}$$

com $\Delta x^0 = x^0 - x_0^0 = c(t - t_0)$ e $|\Delta\mathbf{x}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$.

Este é o resultado central da aula. O propagador é uma **distribuição** que é não nula apenas sobre o **cone de luz futuro** do evento fonte.

4 Interpretação Física: Causalidade

4.1 Propagação na Velocidade da Luz

O propagador encontrado é:

$$\phi_J(x) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \delta(c(t - t_0) - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$$

A delta de Dirac impõe a condição:

$$c(t - t_0) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$$

que é exatamente a condição para que um sinal se propague do ponto \mathbf{x}_0 no tempo t_0 até o ponto \mathbf{x} no tempo t com a velocidade da luz c .

Para tempos futuros ($t > t_0$), o propagador é não nulo apenas sobre a **casca esférica** de raio $c(t - t_0)$ centrada em \mathbf{x}_0 . Esta casca se expande com a velocidade da luz.

4.2 O Cone de Luz Futuro

Geometricamente, no espaço-tempo de Minkowski, o propagador é suportado no **cone de luz futuro** do evento x_0 . O cone de luz é definido por:

$$\Delta s^2 = c^2(t - t_0)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 = 0$$

com $\Delta t > 0$.

Fora do cone de luz (regiões espacialmente separadas), o propagador é identicamente nulo. Isso garante a **causalidade**: um distúrbio em x_0 só pode afetar pontos que estão em seu cone de luz futuro.

A equação de onda admite soluções com propagação na velocidade da luz, que é a velocidade máxima de propagação de informação na teoria da relatividade restrita. A existência de um propagador com suporte no cone de luz é uma manifestação da causalidade na teoria de campos.

5 Generalização para Fontes Estendidas

5.1 Linhas de Mundo

Uma partícula pontual descreve uma **linha de mundo** no espaço-tempo, parametrizada pelo tempo próprio τ :

$$y^\mu(\tau) = (ct(\tau), \mathbf{y}(\tau))$$

A quadricorrente associada a uma partícula carregada é:

$$J^\mu(x) = q \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{dy^\mu}{d\tau} \delta^4(x - y(\tau))$$

5.2 Potencial de uma Carga em Movimento

O campo produzido por uma partícula em movimento é obtido integrando o propagador sobre a linha de mundo:

$$\phi(x) = \int d^4x_0 \phi_J(x - x_0) J(x_0)$$

Substituindo a corrente:

$$\phi(x) = -\frac{q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\delta(\Delta x^0(\tau) - |\Delta \mathbf{x}(\tau)|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|}$$

onde $\Delta x^0(\tau) = x^0 - y^0(\tau)$ e $\Delta \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)$.

5.3 O Princípio da Ação a Distância (Retardada)

A integral é não nula apenas quando existe um tempo próprio τ tal que:

$$x^0 - y^0(\tau) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|$$

isto é, quando o ponto de observação x está sobre o cone de luz futuro de um ponto da linha de mundo. Isso define o **tempo retardado** τ_r , que é a solução da equação:

$$t - t_r = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(t_r)|}{c}$$

O potencial em x é, portanto, causado pela posição da partícula em um tempo anterior t_r , não pela posição simultânea.

Este é o princípio fundamental da eletrodinâmica clássica: o campo eletromagnético se propaga com a velocidade da luz. Uma carga em movimento não produz um campo instantâneo, mas um campo retardado.

6 Conexão com a Eletrostática

6.1 O Limite Estático

No caso em que a partícula está em repouso, sua linha de mundo é:

$$y^\mu(\tau) = (c\tau, \mathbf{y}_0)$$

onde \mathbf{y}_0 é a posição constante da partícula. A condição $\Delta x^0(\tau) = |\Delta \mathbf{x}(\tau)|$ torna-se:

$$x^0 - c\tau = |\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|$$

que pode ser resolvida para τ :

$$c\tau = x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|$$

O potencial é então:

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|}$$

que é exatamente o potencial eletrostático de Coulomb.

6.2 A Ilusão da Ação Instantânea

No caso estático, a posição da partícula não varia com o tempo. Portanto, a posição retardada é a mesma que a posição simultânea. Isso cria a **ilusão** de que a força é instantânea.

A aparente ação instantânea na eletrostática é uma consequência do fato de que a fonte está em repouso. Se a partícula se move, o campo não é mais dado pelo potencial de Coulomb, e a dependência temporal do campo reflete a propagação com velocidade finita.

Este fenômeno é análogo ao que acontece com uma onda em um meio: quando a fonte está em repouso, o campo parece estático, mas na verdade é sustentado por uma onda que se propaga continuamente da fonte para o observador.

7 Visualização do Propagador

O código abaixo gera uma visualização da propagação de uma perturbação a partir de uma fonte pontual. A animação mostra o campo como uma função da posição para diferentes tempos.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation
from IPython.display import HTML

# Parâmetros
c = 1.0 # velocidade da luz
t0 = 0.0 # tempo da fonte
x0 = 0.0 # posição da fonte

# Grid espacial
x = np.linspace(-5, 5, 500)

# Função campo para um dado tempo
def campo(t, x, t0=0, x0=0, c=1):
    """Propagador causal

    Campo não nulo apenas sobre a casca esférica
    Para visualização, usamos uma gaussiana estreita para representar a delta.
    """
    sigma = 0.05
    r = np.abs(x - x0)
    arg = c * (t - t0) - r
    return np.exp(-(arg**2) / (2 * sigma**2)) / (4 * np.pi * r + 1e-10)

# Criação da figura
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))
ax.set_xlim(-5, 5)
ax.set_ylim(0, 0.5)
ax.set_xlabel("Posição x")
ax.set_ylabel("Campo (x)")
ax.set_title("Propagação da Perturbação")
ax.grid(True, alpha=0.3)

# Linha para o campo
(line,) = ax.plot([], [], "b-", linewidth=2)

# Função de inicialização
def init():
    line.set_data([], [])
    return (line,)

# Função de animação
def animate(frame):
    t = frame * 0.1 # tempo
    y = campo(t, x)
    line.set_data(x, y)
    ax.set_title(f"Propagação da Perturbação (t = {t:.1f})")
    return (line,)

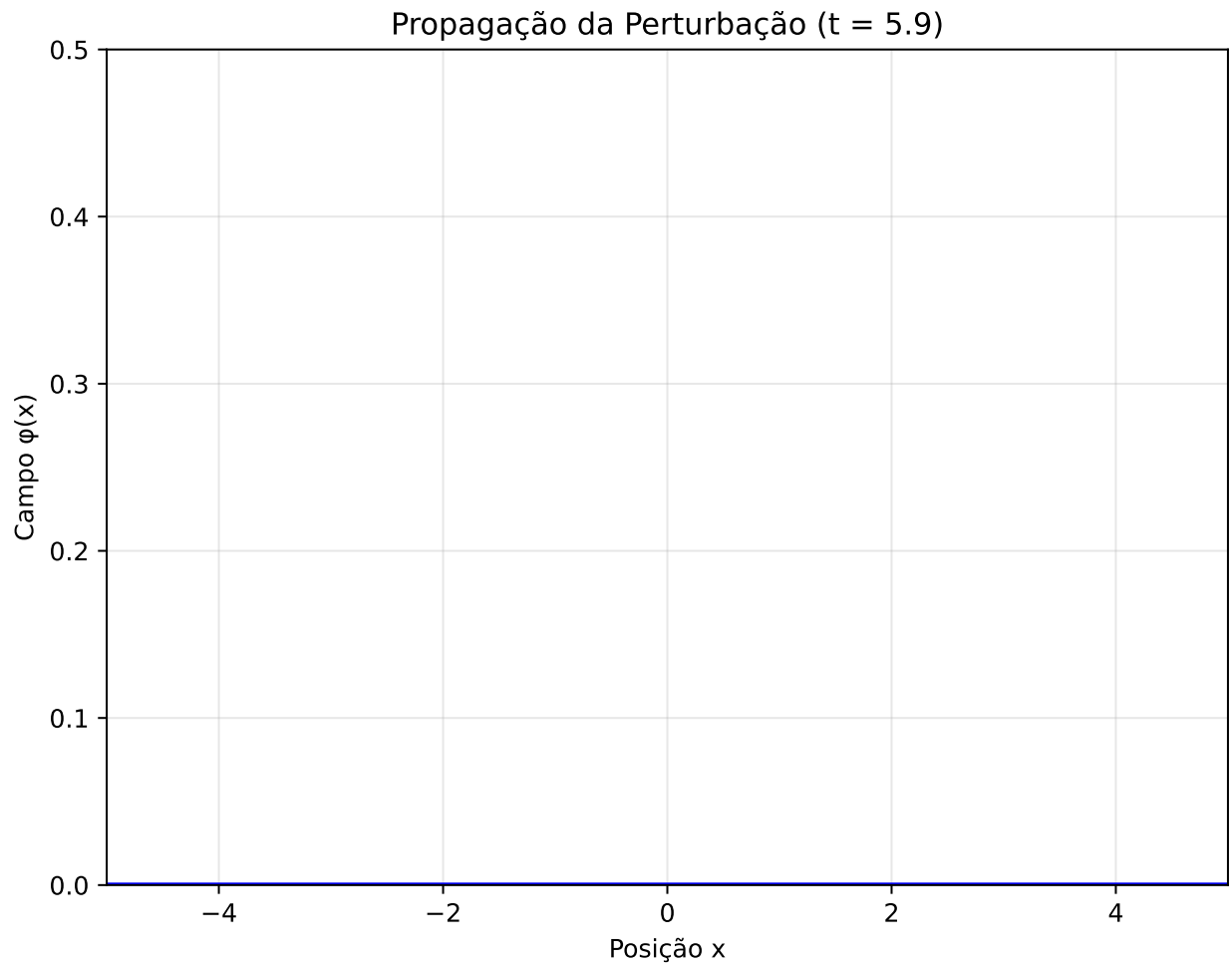
```

```
# Criação da animação
anim = FuncAnimation(fig, animate, init_func=init, frames=60, interval=50, blit=True)

# Para exibir no notebook
HTML(anim.to_jshtml())
```

<IPython.core.display.HTML object>

(a) Propagação de uma perturbação a partir de uma fonte pontual. A casca esférica se expande com a velocidade da luz.



(b)

Figure 1

8 Resumo dos Conceitos-Chave

Conceito	Descrição
Propagador Escalar	Solução da equação de onda com uma fonte pontual delta.
Decomposição de Fourier	O propagador é uma superposição de modos de Fourier com frequência positiva.

Conceito	Descrição
Condição de Causalidade	O propagador é não nulo apenas no cone de luz futuro.
Propagação na Velocidade da Luz	A perturbação se propaga com a velocidade da luz, c .
Tempo Retardado	O campo em um ponto é causado pela fonte em um tempo anterior.
Eletrostática	No limite estático, o propagador dá o potencial de Coulomb.

9 Exercícios

9.1 Exercício 1

Mostre que a solução da equação de onda homogênea $\square\phi = 0$ pode ser escrita como uma superposição de ondas planas da forma $\phi_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = f_{\mathbf{k}}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$.

- Escreva a equação diferencial para $f_{\mathbf{k}}(t)$.
- Determine a solução geral para $f_{\mathbf{k}}(t)$.

9.2 Exercício 2

Considere o propagador causal encontrado na aula:

$$\phi_J(x) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \delta(c(t - t_0) - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$$

- Mostre que $\phi_J(x)$ satisfaz a equação $\square\phi_J = \delta^4(x - x_0)$.
- Qual é o suporte de $\phi_J(x)$ no espaço-tempo?

9.3 Exercício 3

Uma partícula pontual se move com velocidade constante \mathbf{v} . A linha de mundo é $y^\mu(\tau) = (\gamma c\tau, \gamma\mathbf{v}\tau)$.

- Calcule o potencial $\phi(x)$ produzido pela partícula.
- Mostre que, no limite $v \ll c$, o potencial se reduz ao potencial de Coulomb.

9.4 Exercício 4

Considere duas partículas carregadas, uma em $\mathbf{x}_1 = 0$ (em repouso) e outra em $\mathbf{x}_2 = \mathbf{a}$ (em repouso).

- Calcule a força elétrica sobre a partícula 2 usando o potencial retardado.
- A força é instantânea? Justifique sua resposta.

9.5 Exercício 5

Demonstre que a integral angular utilizada no cálculo do propagador é:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta e^{ikr\cos\theta} = 4\pi \frac{\sin(kr)}{kr}$$

9.6 Exercício 6

Uma partícula carregada oscila harmonicamente: $\mathbf{y}(t) = A \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}}$.

- Escreva a quadricorrente da partícula.
- Mostre que o potencial produzido tem componentes que dependem do tempo retardado.

9.7 Exercício 7

Explique por que o potencial de Coulomb parece implicar ação instantânea, mesmo sendo obtido a partir de um propagador causal.

9.8 Exercício 8

Considere o propagador avançado, definido por:

$$\phi_J^{\text{adv}}(x) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \delta(c(t - t_0) + |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$$

- Qual é o suporte deste propagador?
- Por que ele não é usado como solução causal?

9.9 Exercício 9

Mostre que o propagador causal pode ser escrito como:

$$\phi_J(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\delta(\Delta x^0(\tau) - |\Delta \mathbf{x}(\tau)|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|}$$

para uma linha de mundo $y^\mu(\tau)$.

9.10 Exercício 10

- Explique o que é o tempo retardado.
- Qual é a equação que define o tempo retardado para uma partícula em movimento?
- Como o tempo retardado se relaciona com a causalidade?

9.11 Exercício 11

Considere uma fonte estendida com densidade de corrente $J(x)$.

- Escreva a solução geral para o campo $\phi(x)$ usando o propagador.
- Qual é a interpretação física da integral?

9.12 Exercício 12

Demonstre que, para uma partícula em repouso, a condição do cone de luz:

$$c(t - t_0) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$$

é resolvida por $ct_0 = ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$, e que isso leva ao potencial de Coulomb.