

# Campos Escalares Relativísticos: Bases, Vácuo e Propagadores

Sandro Vitenti

## Table of contents

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Base no Espaço de Fase</b>	<b>2</b>
2.1	Definição da Base . . . . .	2
2.2	Produto Simplético . . . . .	2
2.3	Normalização da Base . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Liberdades na Escolha da Base</b>	<b>3</b>
3.1	Graus de Liberdade . . . . .	3
3.2	Solução Geral do Oscilador Harmônico . . . . .	3
3.3	Condição de Normalização em Termos de N e M . . . . .	3
3.4	Escolha do Vácuo . . . . .	3
3.5	Complexo Conjugado e Inversão Temporal . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Decomposição de Campos</b>	<b>4</b>
4.1	Decomposição em Modos . . . . .	4
4.2	Coefficientes de Decomposição . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Solução com Fonte (Propagador)</b>	<b>4</b>
5.1	Problema com Fonte . . . . .	4
5.2	Construção do Propagador . . . . .	4
5.3	Propriedade da Solução . . . . .	5
5.4	Estrutura do Propagador . . . . .	5
5.5	Propriedade de Causalidade . . . . .	5
5.6	Relação com Eletromagnetismo . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Resumo e Principais Resultados</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Exercícios</b>	<b>6</b>
7.1	Exercício 1: Normalização da Base . . . . .	6
7.2	Exercício 2: Liberdade de Gauge . . . . .	6
7.3	Exercício 3: Solução Geral do Oscilador . . . . .	6
7.4	Exercício 4: Escolha do Vácuo . . . . .	6
7.5	Exercício 5: Complexo Conjugado e Inversão Temporal . . . . .	6
7.6	Exercício 6: Decomposição de um Campo . . . . .	7
7.7	Exercício 7: Coeficientes de Decomposição . . . . .	7
7.8	Exercício 8: Solução com Fonte . . . . .	7
7.9	Exercício 9: Propagador Retardado . . . . .	7
7.10	Exercício 10: Causalidade . . . . .	7
7.11	Exercício 11: Partículas e Antipartículas . . . . .	8
7.12	Exercício 12: Relação com Eletromagnetismo . . . . .	8

# 1 Introdução

**Objetivos da Aula:** - Construir uma base completa no espaço de fase para campos escalares relativísticos - Explorar a normalização e as liberdades de gauge na escolha da base - Conectar a escolha da base com a definição do vácuo e a simetria de inversão temporal - Desenvolver a solução com fonte (propagador) para o campo escalar

**Contexto:** Estendemos o problema do oscilador harmônico para o caso de infinitos graus de liberdade, representando um campo escalar relativístico. A estrutura simplética do espaço de fase agora inclui uma integral sobre todos os modos de Fourier.

## 2 Base no Espaço de Fase

### 2.1 Definição da Base

Para cada vetor de onda  $\mathbf{k}$ , definimos pares de funções temporais:

$$f_{\mathbf{k}}(x_0), \quad q_{\mathbf{k}}(x_0)$$

onde  $x_0 = ct$  é a coordenada temporal. A base completa no espaço de fase é composta por:

$$\Psi_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} f_{\mathbf{k}} \\ q_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

com a dependência espacial dada por  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ .

**Observação:** Estamos usando a notação  $x_0$  para a coordenada temporal, seguindo a convenção relativística onde as coordenadas espaço-tempo são  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ .

### 2.2 Produto Simplético

O produto entre dois elementos da base é definido por:

$$(\Psi_{\mathbf{k}'}, \Psi_{\mathbf{k}}) = -i \int_{\mathbb{R}^3} [f_{\mathbf{k}'}^* q_{\mathbf{k}} - q_{\mathbf{k}'}^* f_{\mathbf{k}}] d^3x$$

Substituindo as dependências espaciais:

$$(\Psi_{\mathbf{k}'}, \Psi_{\mathbf{k}}) = -i [f_{\mathbf{k}'}^* q_{\mathbf{k}} - q_{\mathbf{k}'}^* f_{\mathbf{k}}] \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

A base é ortogonal com normalização delta de Dirac.

### 2.3 Normalização da Base

Para que a base seja ortonormal no sentido da delta de Dirac:

$$-i [f_{\mathbf{k}}^* q_{\mathbf{k}} - q_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}}] = 1$$

Equivalentemente:

$$2 \operatorname{Im}(f_{\mathbf{k}}^* q_{\mathbf{k}}) = 1$$

**Definição (Vácuo):** A escolha das funções de base que satisfazem a condição de normalização define o vácuo da teoria. Diferentes escolhas correspondem a diferentes definições de vácuo.

### 3 Liberdades na Escolha da Base

#### 3.1 Graus de Liberdade

Para cada  $\mathbf{k}$ , temos  $f_{\mathbf{k}}, q_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$  (4 graus de liberdade reais). As restrições são:

1. **Equação de normalização:** 1 equação real  $\Rightarrow$  3 graus de liberdade
2. **Liberdade de gauge (fase):**  $f_{\mathbf{k}} \rightarrow e^{i\theta_{\mathbf{k}}} f_{\mathbf{k}}, q_{\mathbf{k}} \rightarrow e^{i\theta_{\mathbf{k}}} q_{\mathbf{k}}$

A liberdade de fase reduz mais um grau de liberdade, resultando em **2 graus de liberdade** efetivos.

**Observação:** A liberdade de fase corresponde à ambiguidade na definição das soluções complexas: podemos escolher  $V = V_1 + iV_2$  ou  $V = V_2 + iV_1$ , ou qualquer combinação linear equivalente.

#### 3.2 Solução Geral do Oscilador Harmônico

A equação de movimento no espaço de Fourier é:

$$\ddot{f}_{\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 f_{\mathbf{k}}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$$

A solução geral é:

$$f_{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} x_0} + M_{\mathbf{k}} e^{+i\omega_{\mathbf{k}} x_0}$$

onde  $N_{\mathbf{k}}, M_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C}$ .

**Observação:** O primeiro termo representa frequências positivas (propagação para frente no tempo), e o segundo, frequências negativas (propagação para trás no tempo).

#### 3.3 Condição de Normalização em Termos de N e M

Da condição de normalização:

$$2\omega_{\mathbf{k}} (|N_{\mathbf{k}}|^2 - |M_{\mathbf{k}}|^2) = 1$$

ou, equivalentemente:

$$\omega_{\mathbf{k}} (|N_{\mathbf{k}}|^2 - |M_{\mathbf{k}}|^2) = \frac{1}{2}$$

**Observação:** Esta é uma relação hiperbólica que define vetores tipo tempo no espaço de Minkowski.

#### 3.4 Escolha do Vácuo

A escolha mais simples é  $M_{\mathbf{k}} = 0$ , resultando:

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}$$

Isso define as funções de base:

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}} x_0}}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$
$$q_{\mathbf{k}} = -i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}} x_0}}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

**Nota:** Esta escolha elimina as soluções de frequência negativa, definindo o vácuo de Minkowski. A normalização inclui o fator  $(2\pi)^{-3/2}$  para garantir a ortogonalidade correta.

### 3.5 Complexo Conjugado e Inversão Temporal

O complexo conjugado das funções de base:

$$f_{\mathbf{k}}^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \frac{e^{+i\omega_{\mathbf{k}}x_0}}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

$$q_{\mathbf{k}}^* = +i\sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \frac{e^{+i\omega_{\mathbf{k}}x_0}}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

**Propriedade Fundamental:** Tomar o complexo conjugado é equivalente a uma inversão temporal:  $x_0 \rightarrow -x_0$ .

**Consequência:** A presença da simetria de inversão temporal implica a existência de partículas e antipartículas na teoria quântica de campos. Esta é uma consequência geométrica da métrica de Minkowski.

## 4 Decomposição de Campos

### 4.1 Decomposição em Modos

Qualquer campo escalar real  $\phi(x)$  pode ser decomposto como:

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} [\alpha_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(x) + \alpha_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}}^*(x)]$$

ou, de forma equivalente:

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} [a_{\mathbf{k}} e^{-ik\cdot x} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{+ik\cdot x}]$$

onde  $k \cdot x = \omega_{\mathbf{k}}x_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ .

### 4.2 Coeficientes de Decomposição

Os coeficientes são obtidos pelo produto simplético:

$$\alpha_{\mathbf{k}} = -i(f_{\mathbf{k}}^*, \phi) = -i \int_{\mathbb{R}^3} [f_{\mathbf{k}}^* q_\phi - q_{\mathbf{k}}^* f_\phi] d^3x$$

Esta relação é fundamental para a quantização do campo.

## 5 Solução com Fonte (Propagador)

### 5.1 Problema com Fonte

Queremos resolver a equação:

$$(\square + m^2)\phi(x) = J(x)$$

onde  $J(x)$  é uma fonte externa.

**Nota:** Estamos usando o operador d'Alembertiano:  $\square = \partial_0^2 - \nabla^2$ .

### 5.2 Construção do Propagador

Construímos a solução como:

$$\phi_J(x) = \int_{-\infty}^{x_0} dx'_0 \int_{\mathbb{R}^3} d^3k [\alpha_{\mathbf{k}}^J(x'_0) f_{\mathbf{k}}(x_0) - \alpha_{\mathbf{k}}^{J*}(x'_0) f_{\mathbf{k}}^*(x_0)]$$

onde:

$$\alpha_{\mathbf{k}}^J(x'_0) = -i(f_{\mathbf{k}}^*, J)|_{x'_0}$$

**Observação:** O limite superior  $x_0$  na integral temporal garante que o propagador seja causal (propagador retardado).

### 5.3 Propriedade da Solução

Derivando  $\phi_J$  em relação a  $x_0$ , obtemos:

$$\dot{\phi}_J = J + (\square + m^2)\phi_J$$

Portanto,  $\phi_J$  satisfaz a equação com fonte.

**Interpretação:** A fonte  $J$  atua como um termo de “forçamento” contínuo, gerando novos modos do campo. Esta é a versão contínua do problema do oscilador harmônico forçado.

### 5.4 Estrutura do Propagador

O propagador retardado tem a forma:

$$G_R(x - x') = \theta(x_0 - x'_0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} [e^{-ik \cdot (x-x')} - e^{+ik \cdot (x-x')}]$$

**Observação:** Este é o propagador de Feynman para o campo escalar, que será fundamental para o cálculo de amplitudes de espalhamento.

### 5.5 Propriedade de Causalidade

O propagador retardado é não nulo apenas quando:

$$(x_0 - x'_0) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

ou seja, quando os eventos estão conectados por um sinal que se propaga na velocidade da luz.

**Definição (Cone de Luz):** A região do espaço-tempo onde  $\Delta x_0 = |\Delta \mathbf{x}|$  é o cone de luz. O propagador é não nulo apenas sobre o cone de luz.

### 5.6 Relação com Eletromagnetismo

No caso do campo escalar, a função de Green do operador de d'Alembert é:

$$G_R(x - x') = \frac{\delta(x_0 - x'_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

**Interpretação:** Esta é a função de Green do eletromagnetismo, que descreve a propagação de sinais no vácuo. A aparente propagação superluminal do potencial de Coulomb é um artefato do regime estático.

## 6 Resumo e Principais Resultados

Conceito	Fórmula	Interpretação Física
Base no espaço de fase	$\Psi_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} f_{\mathbf{k}} \\ g_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$	Modos de Fourier do campo
Ortogonalidade	$(\Psi_{\mathbf{k}'}, \Psi_{\mathbf{k}}) = -i[f^*_{\mathbf{k}'} q - q^*_{\mathbf{k}'} f] \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$	Bases ortogonais no espaço de fase
Normalização	$-i[f^*_{\mathbf{k}} q - q^*_{\mathbf{k}} f] = 1$	Normalização delta de Dirac

Conceito	Fórmula	Interpretação Física
Escolha do vácuo	$M_{\mathbf{k}} = 0,$ $N_{\mathbf{k}} = 1/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}$	Vácuo de Minkowski
Decomposição do campo	$\phi(x) =$ $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [a_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} +$ $a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik \cdot x}]$	Partículas e antipartículas
Propagador retardado	$G_R(x - x') = \theta(x_0 -$ $x'_0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} [e^{-ik \cdot \Delta x} -$ $e^{+ik \cdot \Delta x}]$	Causalidade e cone de luz

## 7 Exercícios

### 7.1 Exercício 1: Normalização da Base

Considere a condição de normalização da base no espaço de fase.

- Mostre que a condição  $(\Psi_{\mathbf{k}'}, \Psi_{\mathbf{k}}) = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  implica que  $-i[f_{\mathbf{k}}^* q_{\mathbf{k}} - q_{\mathbf{k}}^* f_{\mathbf{k}}] = 1$ .
- Verifique que a escolha  $f_{\mathbf{k}} = 1/\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} x_0}$  e  $q_{\mathbf{k}} = -i\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}/2} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} x_0}$  satisfaz esta condição.
- Qual é o valor da expressão se escolhermos  $M_{\mathbf{k}} \neq 0$ ?

### 7.2 Exercício 2: Liberdade de Gauge

A transformação  $f_{\mathbf{k}} \rightarrow e^{i\theta_{\mathbf{k}}} f_{\mathbf{k}}, q_{\mathbf{k}} \rightarrow e^{i\theta_{\mathbf{k}}} q_{\mathbf{k}}$  é uma liberdade de gauge.

- Mostre que esta transformação deixa invariante o produto simplético.
- Quantos graus de liberdade reais restam após impor a condição de normalização e a liberdade de gauge?
- Qual é a interpretação física desta liberdade de gauge?

### 7.3 Exercício 3: Solução Geral do Oscilador

A solução geral do oscilador harmônico é  $f_{\mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} x_0} + M_{\mathbf{k}} e^{+i\omega_{\mathbf{k}} x_0}$ .

- Escreva a expressão para  $q_{\mathbf{k}}$  em termos de  $N_{\mathbf{k}}$  e  $M_{\mathbf{k}}$ .
- Substitua na condição de normalização e mostre que  $\omega_{\mathbf{k}}(|N_{\mathbf{k}}|^2 - |M_{\mathbf{k}}|^2) = 1/2$ .
- Por que  $N_{\mathbf{k}}$  não pode ser zero?

### 7.4 Exercício 4: Escolha do Vácuo

A escolha mais simples é  $M_{\mathbf{k}} = 0$ .

- Qual é o valor de  $N_{\mathbf{k}}$  nesta escolha?
- Escreva explicitamente as funções  $f_{\mathbf{k}}$  e  $q_{\mathbf{k}}$  para esta escolha.
- Qual é a interpretação física de ter  $M_{\mathbf{k}} = 0$ ?
- Que tipo de vácuo esta escolha define?

### 7.5 Exercício 5: Complexo Conjugado e Inversão Temporal

Considere o complexo conjugado das funções de base.

- Escreva  $f_{\mathbf{k}}^*$  e  $q_{\mathbf{k}}^*$  explicitamente.

- b) Mostre que  $(f_{\mathbf{k}}^*, q_{\mathbf{k}}^*) = -(f_{\mathbf{k}}, q_{\mathbf{k}})$  em termos do produto simplético.
- c) Relacione o complexo conjugado com a inversão temporal  $x_0 \rightarrow -x_0$ .
- d) Qual é a importância desta relação para a teoria quântica de campos?

## 7.6 Exercício 6: Decomposição de um Campo

Um campo escalar real  $\phi(x)$  pode ser decomposto em modos de Fourier.

- a) Escreva a decomposição de  $\phi(x)$  em termos de  $a_{\mathbf{k}}$  e  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ .
- b) Qual é a relação entre os coeficientes  $\alpha_{\mathbf{k}}$  da decomposição e  $a_{\mathbf{k}}$ ?
- c) Mostre que  $\phi(x)$  é real se  $a_{\mathbf{k}}^\dagger = a_{\mathbf{k}}^*$ .
- d) Qual é o significado físico de  $a_{\mathbf{k}}$  e  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ ?

## 7.7 Exercício 7: Coeficientes de Decomposição

Os coeficientes de decomposição são obtidos pelo produto simplético.

- a) Defina  $\alpha_{\mathbf{k}}$  em termos do produto simplético entre  $f_{\mathbf{k}}^*$  e  $\phi$ .
- b) Escreva a expressão integral para  $\alpha_{\mathbf{k}}$ .
- c) Mostre que  $\alpha_{\mathbf{k}}$  é constante para soluções da equação de movimento livre.
- d) O que acontece com  $\alpha_{\mathbf{k}}$  quando há uma fonte  $J$ ?

## 7.8 Exercício 8: Solução com Fonte

Considere a equação  $(\square + m^2)\phi(x) = J(x)$ .

- a) Escreva a solução  $\phi_J(x)$  em termos da integral temporal.
- b) Defina  $\alpha_{\mathbf{k}}^J(x'_0)$  e mostre que  $\dot{\phi}_J = J + (\square + m^2)\phi_J$ .
- c) Qual é a condição de contorno que torna a solução causal?

## 7.9 Exercício 9: Propagador Retardado

O propagador retardado é definido por  $\phi_J(x) = \int d^4x' G_R(x - x') J(x')$ .

- a) Escreva a expressão para  $G_R(x - x')$  usando a decomposição em modos.
- b) Mostre que  $G_R(x - x') = \theta(x_0 - x'_0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} [e^{-ik \cdot \Delta x} - e^{+ik \cdot \Delta x}]$ .
- c) Por que a função degrau  $\theta(x_0 - x'_0)$  aparece no propagador?

## 7.10 Exercício 10: Causalidade

O propagador retardado é não nulo apenas sobre o cone de luz.

- a) Mostre que a integral em  $\mathbf{k}$  pode ser escrita como  $\frac{\delta(x_0 - x'_0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ .
- b) Interprete fisicamente esta expressão.
- c) Por que o propagador é zero fora do cone de luz?
- d) Como isso se relaciona com a causalidade na teoria?

### 7.11 Exercício 11: Partículas e Antipartículas

A simetria de inversão temporal implica a existência de partículas e antipartículas.

- a) Como a inversão temporal atua sobre os modos de Fourier?
- b) Qual é a relação entre uma partícula com momento  $\mathbf{k}$  e uma antipartícula?
- c) Por que o fóton é sua própria antipartícula?
- d) O que acontece no caso de partículas carregadas?

### 7.12 Exercício 12: Relação com Eletromagnetismo

O propagador do campo escalar é análogo ao do eletromagnetismo.

- a) Qual é a função de Green do operador de d'Alembert?
- b) Por que o potencial de Coulomb parece se propagar instantaneamente?
- c) Como a análise do propagador resolve esta aparente contradição?
- d) Qual é a relação entre o propagador e o cone de luz?