Funções de Green em Teoria de Campos

Sandro Vitenti

Introdução

Objetivos da Aula

Nesta aula, daremos continuidade ao estudo das funções de Green, agora estendendo o formalismo para teorias de campos. Os principais objetivos são:

- Estender o formalismo de soluções de equações diferenciais para o contexto de campos
- Compreender como construir bases completas no espaço de funções
- Introduzir o conceito de produto interno para campos
- Construir o formalismo simplético para a equação de onda
- Generalizar a função de Green para o espaço-tempo

Contextualização

Na aula anterior, trabalhamos com o formalismo para equações diferenciais ordinárias, onde o espaço de soluções era bidimensional (posição e momento). Agora, ao lidar com campos, temos que considerar um espaço de funções de dimensão infinita, o que torna a construção mais sofisticada.

> **Note**
>
> A transição de partículas para campos envolve mudar de um espaço de fase de dimensão finita ($\mathbb{R}^2$) para um espaço de funções de dimensão infinita. Isso requer novas ferramentas matemáticas e conceitos mais abstratos.

Revisão do Formalismo de Partículas

Estrutura Simplética para Partículas

Para uma partícula, definimos o vetor no espaço de fase:

$$V = \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix}$$

onde y é a posição e q é o momento (ou derivada temporal).

Matriz Simplética

A estrutura simplética é dada pela matriz:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Produto Interno Simplético

O produto interno simplético entre dois vetores V_1 e V_2 é:

$$(V_1, V_2)_\Omega = V_1^T \Omega V_2 = y_1 q_2 - y_2 q_1$$

Este produto interno é conservado quando ambos os vetores são soluções da equação de movimento.

Decomposição de Vetores Arbitrários

Mesmo que S não seja uma solução da equação homogênea, podemos decompô-lo na base de soluções:

$$S(x) = (V_1 \cdot S)V_2 - (V_2 \cdot S)V_1$$

onde V_1 e V_2 são soluções da equação homogênea.

> **!** Important
>
> Para que esta decomposição seja válida no mesmo instante de tempo, precisamos que V_1 e V_2 sejam avaliados no mesmo tempo. A conservação do Wronskiano garante que a independência linear se mantém ao longo do tempo.

Função de Green para Partículas

A função de Green avançada é construída como:

$$U(x) = \int_{-\infty}^{x} [V_1^T(\xi) S(\xi) V_2(x) - V_2^T(\xi) S(\xi) V_1(x)] d\xi$$

Esta construção garante que:

1. U satisfaz a equação não-homogênea
2. $U(-\infty) = 0$ (condição de contorno no passado)

> Tip
>
> A escolha do limite inferior como $-\infty$ corresponde à condição de que a solução é zero no passado distante. Poderíamos escolher qualquer instante inicial x_0, mas a escolha $-\infty$ é conveniente para problemas de espalhamento.

Extensão para Teoria de Campos

O Espaço de Funções

Na teoria de campos, a função de campo é:

$$\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

que associa a cada ponto do espaço-tempo um valor (escalar).

Condições Iniciais

Diferente do caso de partículas, agora precisamos especificar:

1. O valor do campo em cada ponto do espaço: $\phi(0, \mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x})$
2. A derivada temporal do campo: $\dot{\phi}(0, \mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x})$

$$\phi_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \dot{\phi}_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

> **Note**
>
> A especificação de duas funções como condições iniciais é análoga a especificar posição e momento, mas agora em cada ponto do espaço.

Produto Interno para Campos

Definição Geral

Definimos o produto interno para funções de campo como:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f^*(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}) d^3x$$

onde $W(\mathbf{x})$ é uma função de peso.

Escolha do Peso

Para a geometria euclidiana e o operador laplaciano, a escolha natural é $W(\mathbf{x}) = 1$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f^*(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d^3x$$

> **Important**
>
> A escolha do peso está relacionada ao operador que queremos que seja auto-adjunto. Para o laplaciano na geometria euclidiana, o peso é constante.

Auto-adjuntividade do Laplaciano

O operador laplaciano é auto-adjunto no produto interno definido acima:

$$\langle f, \nabla^2 g \rangle = \langle \nabla^2 f, g \rangle$$

desde que as funções decaiam suficientemente rápido no infinito (condições de contorno adequadas).

Formalismo Simplético para Campos

Vetor de Estado no Espaço de Fase

Para campos, definimos o vetor no espaço de fase como:

$$Q = \begin{pmatrix} \phi \\ \pi \end{pmatrix}$$

onde $\pi = \dot{\phi}$ é o momento conjugado (ou derivada temporal).

Produto Interno Simplético

O produto interno simplético para campos é:

$$(Q_1, Q_2)_\Omega = -i \int_{\mathbb{R}^3} Q_1^\dagger \Omega Q_2 d^3x$$

onde:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Expandindo:

$$(Q_1, Q_2)_\Omega = -i \int_{\mathbb{R}^3} (\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1) d^3x$$

> ⚠ Warning
>
> O fator $-i$ na definição do produto interno é crucial para garantir que o produto seja positivo definido quando trabalhamos com funções complexas.

Equação de Onda no Formalismo Simplético

Equação de Onda

A equação de onda é:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_0^2} = \nabla^2 \phi$$

onde $x_0 = ct$ é a coordenada temporal em unidades de comprimento.

Decomposição em Primeira Ordem

Definindo $\pi = \partial_{x_0} \phi$, podemos escrever o sistema como:

$$\dot{\phi} = \pi$$

$$\dot{\pi} = \nabla^2 \phi$$

No formalismo matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nabla^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \pi \end{pmatrix}$$

Matriz Hamiltoniana

A matriz que gera a evolução temporal é:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nabla^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz satisfaz $H = \Omega \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um operador Hermitiano.

Conservação do Wronskiano de Campos

O Wronskiano de campos é definido como:

$$W(\phi_1, \pi_1; \phi_2, \pi_2) = \int_{\mathbb{R}^3} (\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1) d^3x$$

Sua derivada temporal é:

$$\frac{dW}{dx_0} = \int_{\mathbb{R}^3} [\pi_1 \pi_2 + \phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \pi_2 \pi_1 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1] d^3x$$

$$\frac{dW}{dx_0} = \int_{\mathbb{R}^3} [\phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1] d^3x$$

Usando a auto-adjuntividade do laplaciano:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_1 \nabla^2 \phi_2 d^3x = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla^2 \phi_1) \phi_2 d^3x$$

Portanto:

$$\frac{dW}{dx_0} = 0$$

Ou seja, o Wronskiano é conservado.

> Tip
>
> A conservação do Wronskiano garante que uma base linearmente independente no instante inicial permanecerá linearmente independente para todo tempo. Isso é essencial para a construção de soluções gerais.

Construção de Bases para Campos

Base de Ondas Planas

Definição

As ondas planas formam uma base completa para o espaço de funções em $\mathbb{R}^3$:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}$$

Relação de Ortogonalidade

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x})d^3x = \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

Completeza

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\psi^*_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}')d^3k = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

Decomposição de Fourier

Transformada de Fourier

Qualquer função (suave) pode ser decomposta como:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(\mathbf{k})\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}d^3k$$

onde:

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x})\frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}d^3x$$

Propriedades da Base de Ondas Planas

1. **Diagonaliza o laplaciano**:
$$\nabla^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$
2. **Comportamento sob translações**:
$$f(\mathbf{x}+\mathbf{a}) \to \tilde{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}$$
3. **Comportamento sob rotações**:
$$f(R\mathbf{x}) \to \tilde{f}(R^{-1}\mathbf{k})$$

Soluções Modais

Separação de Variáveis

Procuramos soluções da forma:

$$\phi(x_0, \mathbf{x}) = T(x_0)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$$

Substituindo na equação de onda:

$$\ddot{T}(x_0)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = T(x_0)\nabla^2\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$$

$$\frac{\ddot{T}(x_0)}{T(x_0)} = \frac{\nabla^2\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})} = -k^2$$

Soluções Temporais

Para cada $\mathbf{k}$, obtemos a equação do oscilador harmônico:

$$\ddot{T}(x_0) + k^2 T(x_0) = 0$$

As soluções são:

$$T(x_0) = Ae^{-i\omega_k x_0} + Be^{i\omega_k x_0}$$

onde $\omega_k = |\mathbf{k}|$ (no sistema de unidades onde $c = 1$).

Soluções de Onda Plana

Portanto, as soluções modais são:

$$\phi_{\mathbf{k}}(x_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k x_0)}$$

$$\phi^*_{\mathbf{k}}(x_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k x_0)}$$

Formalismo Simplético para Ondas Planas

Base Simplética

Definimos a base de ondas planas no espaço de fase:

$$Q_{\mathbf{k}}(x_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_{\mathbf{k}} \\ -i\omega_k \phi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

Produto Interno dos Modos

Calculamos o produto interno simplético entre dois modos:

$$(Q_{\mathbf{k}}, Q_{\mathbf{k}'})_\Omega = -i \int_{\mathbb{R}^3} Q^\dagger_{\mathbf{k}} \Omega Q_{\mathbf{k}'} d^3x$$

$$= \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

> **! Important**
>
> A normalização $\frac{1}{\sqrt{2}}$ foi escolhida para que o produto interno dos modos seja exatamente uma delta de Dirac.

Decomposição do Campo

Qualquer campo pode ser decomposto como:

$$Q(x_0, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} [a_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}}(x_0, \mathbf{x}) + a^*_{\mathbf{k}} Q^*_{\mathbf{k}}(x_0, \mathbf{x})] d^3k$$

Os coeficientes são obtidos por:

$$a_{\mathbf{k}} = (Q_{\mathbf{k}}, Q)_\Omega$$

Função de Green para Campos

Construção do Propagador

Generalização do Caso de Partículas

Para campos, a função de Green (propagador) é construída de forma análoga:

$$G(x_0, \mathbf{x}; x_0', \mathbf{x}') = -i\Theta(x_0 - x_0') \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [e^{-i\omega_k(x_0 - x_0')} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} - e^{i\omega_k(x_0 - x_0')} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}]$$

Simplificação

Esta expressão pode ser simplificada para:

$$G(x, x') = \Theta(x_0 - x_0') \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k} \sin[\omega_k(x_0 - x_0')] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}$$

Propriedades do Propagador

Equação Diferencial

O propagador satisfaz:

$$(\partial^2_{x_0} - \nabla^2) G(x, x') = \delta^{(4)}(x - x')$$

Condições de Contorno

- **Propagador avançado**: vanish para $x_0 < x_0'$ (causalidade)
- **Propagador retardado**: vanish para $x_0 > x_0'$ (causalidade temporal)

> ⚠ Warning
>
> A escolha entre propagador avançado e retardado corresponde a diferentes condições de contorno. O propagador avançado é adequado para problemas de espalhamento com condições iniciais no passado.

Simulações Numéricas

Visualização de Ondas Planas

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation
from IPython.display import HTML

# Parâmetros
```

```python
k = 2.0  # número de onda
omega = k  # frequência (c=1)

# Domínio espacial
x = np.linspace(-10, 10, 1000)
t = np.linspace(0, 2 * np.pi / omega, 100)


# Função de onda
def onda_plana(x, t, k, omega):
    return np.cos(k * x - omega * t)


# Criar figura
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))
ax.set_xlim(-10, 10)
ax.set_ylim(-1.5, 1.5)
ax.set_xlabel(r"$x$")
ax.set_ylabel(r"$\phi(x,t)$")
ax.set_title(f"Onda Plana: k = {k},   = {omega}")
ax.grid(True, alpha=0.3)

# Linha da onda
(line,) = ax.plot([], [], "b-", lw=2)


# Função de animação
def animate(i):
    y = onda_plana(x, t[i], k, omega)
    line.set_data(x, y)
    return (line,)


# Criar animação
anim = FuncAnimation(fig, animate, frames=len(t), interval=50, blit=True)
plt.close()
HTML(anim.to_html5_video())
```

```
<IPython.core.display.HTML object>
```

Figure 1: Visualização de ondas planas em 1D

Superposição de Ondas

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parâmetros
k0 = 2.0  # número de onda central
sigma = 0.5  # largura do pacote
x = np.linspace(-15, 15, 1000)
```

```python
# Pacote de ondas (transformada de Fourier de uma gaussiana)
def pacote_ondas(x, t, k0, sigma):
    k = np.linspace(-5, 5, 500)
    dk = k[1] - k[0]
    # Envelope gaussiano no espaço k
    envelope = np.exp(-((k - k0) ** 2) / (2 * sigma**2))
    # Fase temporal
    omega = np.abs(k)  # c=1
    fase = np.exp(1j * (k * x - omega * t))
    # Integral (superposição)
    psi = np.sum(envelope * fase * dk)
    return np.real(psi) / np.sqrt(2 * np.pi)


# Tempos para visualização
tempos = [0, 2, 4, 6]
fig, axes = plt.subplots(2, 2, figsize=(12, 10))
axes = axes.flatten()

for i, t in enumerate(tempos):
    y = [pacote_ondas(xi, t, k0, sigma) for xi in x]
    axes[i].plot(x, y, "b-", lw=2)
    axes[i].set_xlim(-15, 15)
    axes[i].set_ylim(-0.5, 0.5)
    axes[i].set_xlabel(r"$x$")
    axes[i].set_ylabel(r"$\phi(x,t)$")
    axes[i].set_title(f"t = {t}")
    axes[i].grid(True, alpha=0.3)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

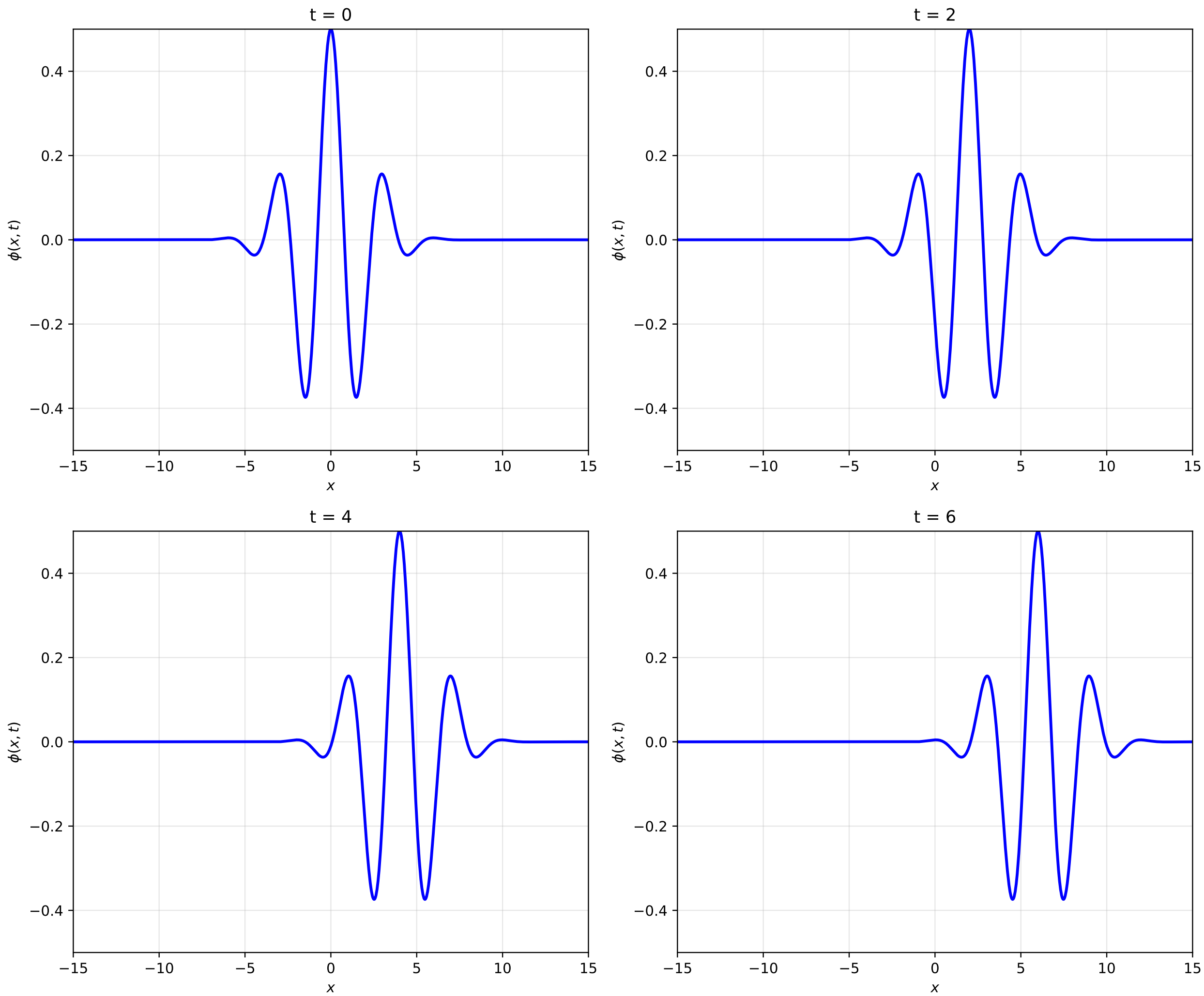

Figure 2: Superposição de ondas planas (pacote de ondas)

Visualização do Propagador

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parâmetros
x = np.linspace(-20, 20, 1000)
t = 2.0  # tempo fixo
epsilon = 0.1  # regularização


# Propagador em 1D (regularizado)
def propagador_1d(x, t, epsilon=0.1):
    # Versão regularizada do propagador
    return np.sin(t * np.sqrt(x**2 + epsilon**2)) / np.sqrt(x**2 + epsilon**2)


y = propagador_1d(x, t, epsilon)
```

```python
fig, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))
ax.plot(x, y, "r-", lw=2)
ax.set_xlabel(r"$x - x'$")
ax.set_ylabel(r"$G(x, t; 0, 0)$")
ax.set_title(f"Propagador em 1D (t = {t})")
ax.grid(True, alpha=0.3)
ax.axhline(y=0, color="black", linestyle="-", alpha=0.3)
ax.axvline(x=0, color="black", linestyle="-", alpha=0.3)
plt.show()
```

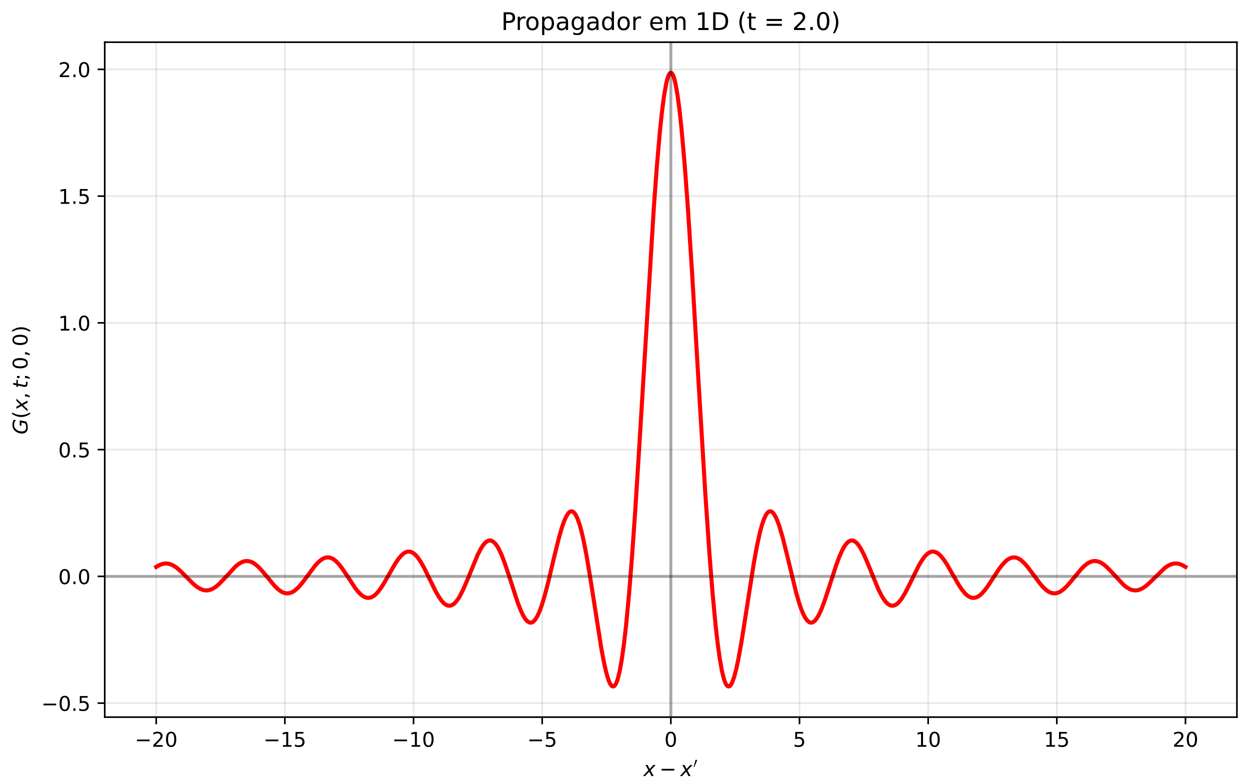

Figure 3: Função de Green (propagador) em 1D

Resumo dos Conceitos

Conceito	Partículas	Campos
Espaço de fase	$\mathbb{R}^2$ (posição, momento)	Espaço de funções (dimensão infinita)
Vetor de estado	$V = (y, q)^T$	$Q = (\phi, \pi)^T$
Matriz simplética	$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Produto interno	$V_1^T \Omega V_2$	$-i \int Q_1^\dagger \Omega Q_2 d^3x$
Hamiltoniana	$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$	$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nabla^2 & 0 \end{pmatrix}$
Base	2 vetores V_1, V_2	Infinitos modos $Q_{\mathbf{k}}$
Condições iniciais	$y(0), q(0)$	$\phi(0, \mathbf{x}), \pi(0, \mathbf{x})$

Conceito	Partículas	Campos
Função de Green	$G(x, x')$	$G(x_0, \mathbf{x}; x_0', \mathbf{x}')$

Exercícios

Exercício 1: Formalismo Simplético para Campos

a) Mostre que o produto interno simplético para campos é conservado.

b) Verifique que a matriz Ω satisfaz $\Omega^2 = -I$ e $\Omega^T = -\Omega$.

c) Mostre que o operador H da equação de onda pode ser escrito como $H = \Omega\mathcal{H}$, onde $\mathcal{H}$ é um operador Hermitiano.

d) Determine a forma explícita de $\mathcal{H}$ para o campo escalar.

Exercício 2: Ondas Planas

a) Verifique que as ondas planas formam uma base ortonormal no produto interno $\langle f, g\rangle = \int f^* g \, d^3x$.

b) Mostre que a transformada de Fourier é uma transformação unitária.

c) Calcule a transformada de Fourier da função gaussiana $f(\mathbf{x}) = e^{-a|\mathbf{x}|^2}$.

d) Mostre que a transformada de Fourier diagonaliza o operador laplaciano.

Exercício 3: Soluções da Equação de Onda

a) Resolva a equação de onda $\partial_{x_0}^2 \phi = \nabla^2 \phi$ usando o método de separação de variáveis.

b) Encontre todas as soluções modais da forma $\phi(x_0, \mathbf{x}) = T(x_0)\psi(\mathbf{x})$.

c) Mostre que para cada $\mathbf{k}$ obtemos um oscilador harmônico.

d) Escreva a solução geral da equação de onda como uma integral sobre $\mathbf{k}$.

Exercício 4: Produto Interno Simplético

a) Calcule $(Q_{\mathbf{k}}, Q_{\mathbf{k}'})_\Omega$ para os modos de onda plana.

b) Mostre que $(Q_{\mathbf{k}}^*, Q_{\mathbf{k}'})_\Omega = -\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$.

c) Verifique que $(Q_{\mathbf{k}}, Q_{\mathbf{k}'}^*)_\Omega = 0$.

d) Interprete o significado físico destes resultados.

Exercício 5: Decomposição do Campo

a) Mostre que qualquer campo pode ser decomposto como:

$$Q(x_0, \mathbf{x}) = \int [a_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^* Q_{\mathbf{k}}^*] d^3k$$

b) Encontre a expressão para $a_{\mathbf{k}}$ em termos do campo e de sua derivada temporal.

c) Determine as relações de comutação para os operadores $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^\dagger$.

d) Interpretar $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ como operadores de criação e aniquilação.

Exercício 6: Propagador Avançado

a) Construa o propagador avançado para a equação de onda usando o formalismo simplético.

b) Verifique que o propagador satisfaz a equação $(\partial_{x_0}^2 - \nabla^2)G(x, x') = \delta^{(4)}(x - x')$.

c) Mostre que $G(x, x') = 0$ para $x_0 < x_0'$ (condição de causalidade).

d) Calcule o propagador em 1+1 dimensões explicitamente.

Exercício 7: Condições de Contorno

a) Discuta a diferença entre propagador avançado e propagador retardado.

b) Por que o propagador avançado é adequado para problemas de espalhamento?

c) Como as condições de contorno no infinito afetam a escolha do propagador?

d) Mostre que o propagador avançado e retardado estão relacionados por $G_{\text{ret}} = G_{\text{adv}}^*$.

Exercício 8: Massa e Modos de Fourier

a) Estenda o formalismo para a equação de Klein-Gordon: $(\partial_{x_0}^2 - \nabla^2 + m^2)\phi = 0$.

b) Mostre que as soluções modais têm frequência $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$.

c) Como a massa modifica a relação de dispersão?

d) Discuta o limite $m \to 0$ e compare com o caso sem massa.

Exercício 9: Simulações Numéricas

a) Implemente uma simulação numérica para a equação de onda em 1D usando diferenças finitas.

b) Visualize a evolução temporal de um pacote de ondas.

c) Compare a evolução de uma solução com e sem massa.

d) Implemente o propagador numericamente e verifique suas propriedades.

Exercício 10: Generalizações

a) Como o formalismo se estende para campos vetoriais (como o eletromagnetismo)?

b) Discuta as dificuldades de estender o formalismo para espaços curvos.

c) O que muda se o campo for complexo em vez de real?

d) Discuta a relação entre este formalismo e a quantização canônica.