Propagadores Dependentes do Tempo e Estrutura Simplética

Sandro Vitenti

Introdução

Nesta aula, exploramos os propagadores dependentes do tempo e a estrutura simplética subjacente às equações diferenciais de segunda ordem. O objetivo é desenvolver uma formulação que unifique o tratamento de soluções linearmente independentes e que prepare o terreno para a quantização de campos.

Objetivos da Aula

- Revisitar a formulação simplética para equações de segunda ordem
- Construir soluções complexificadas e entender sua relação com a propagação temporal
- Analisar as propriedades de transformação sob reversão temporal
- Compreender a conexão com a física de partículas e o conceito de antipartículas

Formulação Simplética

Estrutura da Equação

Consideramos uma equação de segunda ordem na forma:

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

que pode ser reescrita no espaço de fase como:

$$\begin{pmatrix} y' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -m\Omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix}$$

onde $q = my'$ é o momento canônico.

Definimos o vetor de estado:

$$V = \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix}$$

Matriz Simplética

A estrutura simplética é codificada pela matriz:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz é antissimétrica ($\Omega^T = -\Omega$) e desempenha um papel fundamental na definição do Wronskiano conservado.

O Wronskiano de duas soluções V_1 e V_2 é dado por:

$$W(V_1, V_2) = V_1^T \Omega V_2$$

e é uma constante do movimento (conservado).

Hamiltonianos e Propriedades

O Hamiltoniano associado é:

$$H = \begin{pmatrix} m\Omega^2 & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix}$$

A equação de movimento pode ser escrita como:

$$V' = \Omega H V$$

Soluções Linearmente Independentes

Base no Espaço de Soluções

Para duas soluções linearmente independentes V_1 e V_2, temos:

$$V_1^T \Omega V_2 = \text{constante}$$

Podemos normalizar convenientemente:

$$V_1^T \Omega V_2 = \frac{1}{2}$$

Solução Geral

Qualquer solução U pode ser escrita como combinação linear:

$$U = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$$

Os coeficientes α_i são constantes e podem ser obtidos via:

$$\alpha_1 = 2(V_1^T \Omega U), \quad \alpha_2 = -2(V_2^T \Omega U)$$

Complexificação do Espaço de Soluções

Construção da Solução Complexa

Definimos a solução complexificada:

$$V = V_1 + iV_2$$

Esta solução satisfaz a mesma equação diferencial no espaço complexo:

$$V' = \Omega H V$$

Produto Simplético Hermitiano

Introduzimos o produto:

$$\langle V, U \rangle = -iV^\dagger \Omega U$$

onde $V^\dagger = (V^*)^T$ é o conjugado Hermitiano.

Para soluções com normalização $V_1^T \Omega V_2 = 1/2$, temos:

$$\langle V, V \rangle = 1$$

Subespaços de Norma Positiva e Negativa

O espaço complexificado C^2 se decompõe em dois subespaços:

- **Norma positiva**: $\langle V, V \rangle = 1$
- **Norma negativa**: $\langle V, V \rangle = -1$

Esta estrutura é análoga à que aparece na mecânica quântica relativística, onde soluções de energia positiva e negativa correspondem a partículas e antipartículas.

Propagação no Tempo

Função de Green (Solução Futura)

Consideramos uma solução com interação instantânea em x_0:

$$U(x) = \Theta(x - x_0)[\alpha \bar{V} V(x) + \alpha^* \bar{V}^* V^*(x)]$$

onde V é a solução complexa. Esta solução satisfaz:

$$U' - \Omega H U = \delta(x - x_0) U_0$$

Solução Passada (Avançada)

A solução que propaga informações do futuro para o passado é:

$$U(x) = \Theta(x_0 - x)[\alpha \bar{V} V(x) + \alpha^* \bar{V}^* V^*(x)]$$

satisfazendo:

$$U' - \Omega H U = -\delta(x - x_0) U_0$$

A diferença de sinal entre as soluções futura e passada é fundamental para a construção de propagadores em teoria quântica de campos.

Simetria de Reversão Temporal

Transformação das Componentes

Sob reversão temporal $x \to -x$, o vetor V se transforma como:

$$V_R(x_R) = T V(x)$$

com:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comportamento da Equação

A equação de movimento é invariante sob reversão temporal se:

$$T H(x) T = H(-x)$$

A invariância por reversão temporal leva à relação entre soluções futuras e passadas, fundamental para a construção de operadores de criação e aniquilação.

Visualização Computacional

Propagador do Oscilador Harmônico

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp


# Definindo o oscilador harmônico
```

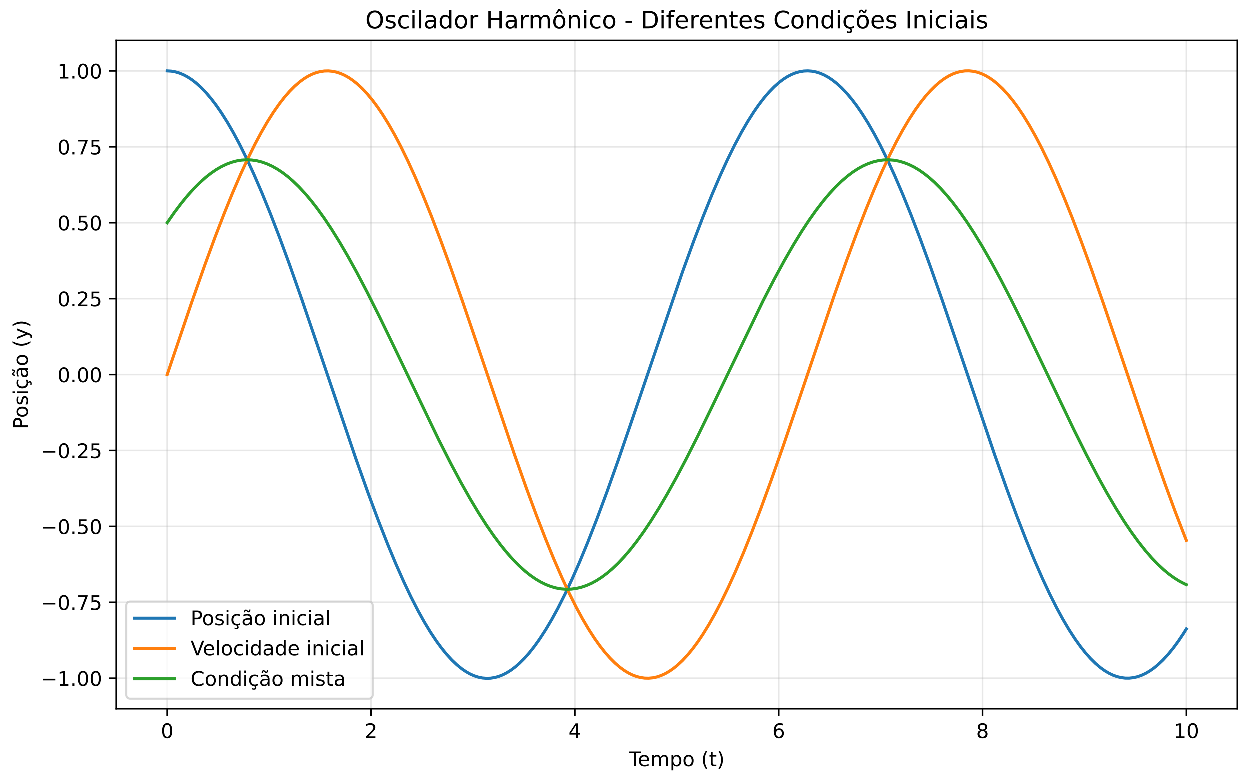
```
def harmonic_oscillator(t, y, omega=1.0):
    return [y[1], -(omega**2) * y[0]]


# Configuração do problema
omega = 1.0
t_span = (0, 10)
t_eval = np.linspace(0, 10, 1000)

# Solução para diferentes condições iniciais
conditions = [
    (1.0, 0.0, "Posição inicial"),
    (0.0, 1.0, "Velocidade inicial"),
    (0.5, 0.5, "Condição mista"),
]

plt.figure(figsize=(10, 6))
for y0, v0, label in conditions:
    sol = solve_ivp(harmonic_oscillator, t_span, [y0, v0], t_eval=t_eval, args=(omega,))
    plt.plot(sol.t, sol.y[0], label=label)

plt.xlabel("Tempo (t)")
plt.ylabel("Posição (y)")
plt.title("Oscilador Harmônico - Diferentes Condições Iniciais")
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend()
plt.show()
```



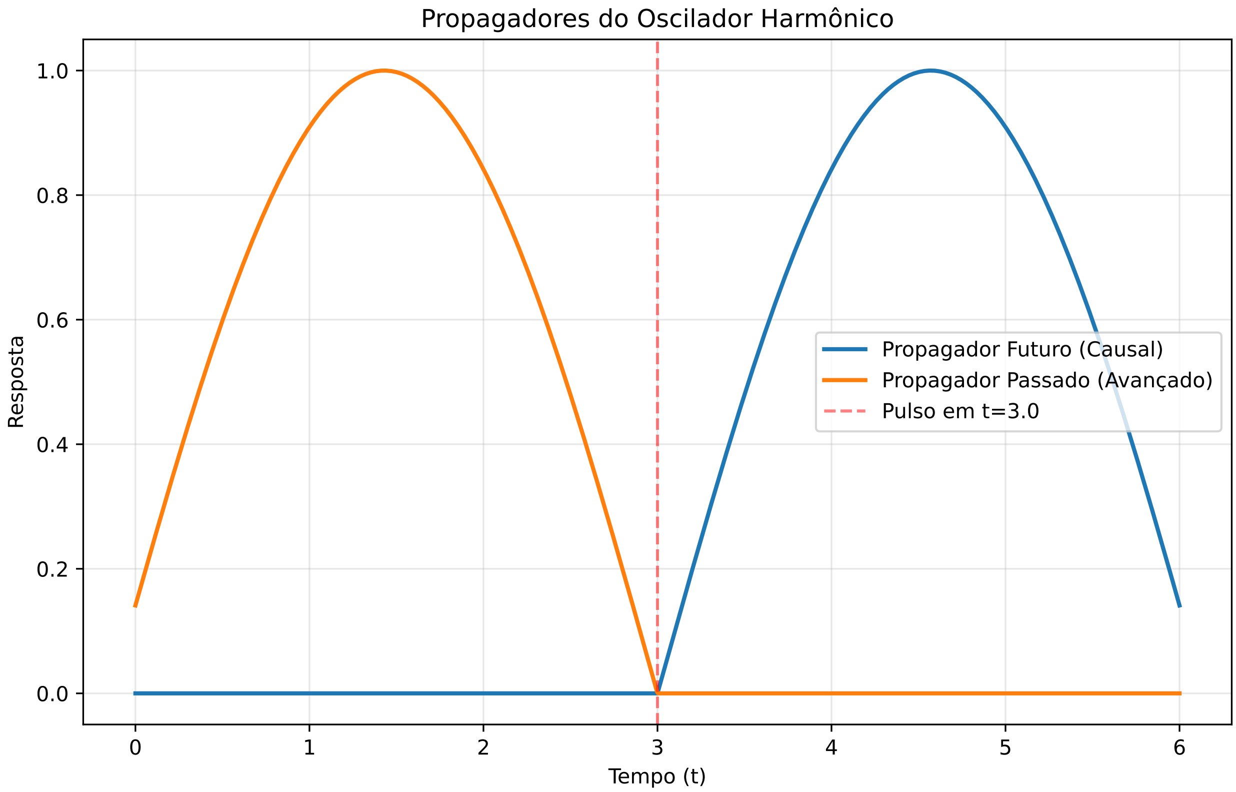
Propagadores Futuro e Passado

```python
# Simulação de um pulso instantâneo (função de Green)
def green_function_solution(t, t0=3.0, amplitude=1.0, omega=1.0):
    """Solução futura (causal) com pulso em t0"""
    y = np.zeros_like(t)
    for i, ti in enumerate(t):
        if ti >= t0:
            y[i] = amplitude * np.sin(omega * (ti - t0)) / omega
    return y


def green_function_advanced(t, t0=3.0, amplitude=1.0, omega=1.0):
    """Solução passada (avançada) com pulso em t0"""
    y = np.zeros_like(t)
    for i, ti in enumerate(t):
        if ti <= t0:
            y[i] = amplitude * np.sin(omega * (t0 - ti)) / omega
    return y


t = np.linspace(0, 6, 1000)
t0 = 3.0

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(
    t, green_function_solution(t, t0), label="Propagador Futuro (Causal)", linewidth=2
)
plt.plot(
    t,
    green_function_advanced(t, t0),
    label="Propagador Passado (Avançado)",
    linewidth=2,
)
plt.axvline(x=t0, color="red", linestyle="--", alpha=0.5, label=f"Pulso em t={t0}")
plt.xlabel("Tempo (t)")
plt.ylabel("Resposta")
plt.title("Propagadores do Oscilador Harmônico")
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.legend()
plt.show()
```



Resumo dos Conceitos

Conceito	Descrição	Aplicação
Matriz Simplética (Ω)	Codifica a estrutura simplética do espaço de fase	Wronskiano conservado
Solução Complexa (V)	Combinação $V_1 + iV_2$	Unifica duas soluções independentes
Produto Hermitiano	$\langle V, U \rangle = -iV^\dagger \Omega U$	Define norma e ortogonalidade
Norma Positiva/Negativa	$\langle V, V \rangle = \pm 1$	Partículas/Antipartículas
Prop. Futuro (Causal)	$\Theta(x - x_0)$	Propagação para frente no tempo
Prop. Passado (Avançado)	$\Theta(x_0 - x)$	Propagação para trás no tempo
Reversão Temporal	$T = \text{diag}(1, -1)$	Simetria fundamental

Exercícios

Conceitos Fundamentais

1. **Wronskiano e Independência Linear**
   (a) Mostre que o Wronskiano $W(V_1, V_2) = V_1^T \Omega V_2$ é constante para soluções da equação $V' = \Omega H V$.

   (b) Verifique que $W(V_1, V_1) = 0$ usando a propriedade de antissimetria de Ω.
2. **Normalização de Soluções**
   (a) Dada a normalização $V_1^T \Omega V_2 = 1/2$, expresse a solução geral U em termos de V_1 e V_2.

   (b) Calcule os coeficientes α_1 e α_2 para uma condição inicial genérica.
3. **Complexificação**

(a) Verifique que $V = V_1 + iV_2$ satisfaz a mesma equação diferencial.

(b) Calcule $\langle V, V \rangle = -iV^\dagger \Omega V$ e mostre que é igual a 1.

4. **Norma Negativa**

(a) Considere $\tilde{V} = iV$. Calcule $\langle \tilde{V}, \tilde{V} \rangle$.

(b) Interprete fisicamente este resultado.

5. **Propagador Futuro**

(a) Mostre que a solução $U(x) = \Theta(x - x_0)[\alpha V(x) + \alpha^* V^*(x)]$ satisfaz a equação com fonte $U' - \Omega H U = \delta(x - x_0) U_0$.

(b) Determine a constante U_0 em termos de α.

Propagadores e Condições de Contorno

6. **Propagador Passado**

(a) Construa a solução com condições no futuro $U(x) = \Theta(x_0 - x)[\alpha V(x) + \alpha^* V^*(x)]$.

(b) Mostre que ela satisfaz $U' - \Omega H U = -\delta(x - x_0) U_0$.

7. **Condições de Contorno Espaciais**

(a) Para o problema de uma corda presa em $x = 0$ e $x = L$, determine como combinar os propagadores futuro e passado.

(b) Explique por que a solução envolve ambas as direções de propagação.

Propriedades de Transformação

8. **Reversão Temporal**

(a) Verifique que $T = \text{diag}(1, -1)$ transforma $V = (y, q)^T$ em $V_R = (y, -q)^T$.

(b) Mostre que $T\Omega T = -\Omega$ e $THT = H$ para o oscilador harmônico.

9. **Transformação de Rotações**

(a) Considere uma rotação no espaço de fase R. Mostre que $R^T \Omega R = \Omega$.

(b) Compare com a transformação temporal T e discuta a diferença.

Aplicações e Generalizações

10. **Oscilador Harmônico com Forçamento**

(a) Resolva a equação $y'' + \omega^2 y = f(x)$ usando os propagadores construídos.

(b) Escreva a solução geral e identifique os termos futuro e passado.

11. **Sistemas com Ω Dependente do Tempo**

(a) Generalize a construção para $V' = \Omega(x) H(x) V$ com $\Omega(x)$ variável.

(b) Discuta como a conservação do Wronskiano é afetada.

12. **Conexão com Mecânica Quântica**

(a) Identifique o análogo do comutador $[x, p]$ no formalismo simplético.

(b) Mostre como a estrutura de norma positiva/negativa leva à quantização.

Referências

- Notas de aula sobre a delta de Dirac (material anterior)

- Mecânica Clássica Avançada - Capítulos sobre estrutura simplética
- Teoria Quântica de Campos - Propriedades de propagadores