Função Delta de Dirac, Funções de Green e Distribuições

Sandro Vitenti

Table of contents

Introdução

Nesta aula, vamos conectar o **Teorema Fundamental do Cálculo** à **função delta de Dirac** e às **funções de Green**. A ideia central é que a delta não é um objeto mágico — ela é uma generalização natural da derivada da função degrau (Heaviside).

> **OBSERVAÇÃO DO PROFESSOR:** "Isso não tem nada a ver com gravitação ou eletromagnetismo em si. Na verdade, é uma consequência indireta do espaço ser euclidiano e de como as coisas se espalham no espaço de acordo com a dimensão."

A Função Degrau de Heaviside

A função degrau (ou função de Heaviside) é definida como:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Características:

- É uma função com uma **descontinuidade** em $x = 0$.
- Representa uma transição abrupta de 0 para 1.

A Função Delta de Dirac

A **delta de Dirac** $\delta(x)$ é definida pela **propriedade de filtragem** (ou "sifting"):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\, f(x_0)\, dx_0 = f(x)$$

Para qualquer função f suave (bem-comportada).

Interpretação: A delta "seleciona" o valor de f no ponto $x = x_0$.

Delta como Derivada da Theta

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} f(x_0)\, dx_0 = f(x)$$

Reescrevendo o limite superior com a função θ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x - x_0)\, f(x_0)\, dx_0 = \int_{-\infty}^{x} f(x_0)\, dx_0$$

Derivando ambos os lados:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\theta(x - x_0)\, f(x_0)\, dx_0 = f(x)$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\theta(x - x_0) = \delta(x - x_0)}$$

Construindo a Theta a Partir de Funções Suaves

Podemos construir $\theta(x)$ usando a função módulo:

- Seja $g(x) = |x|$.
- A derivada de $g(x)$ é $\text{sgn}(x)$ (com ambiguidade em $x = 0$).
- Então:

$$\theta(x) = \frac{g'(x) + 1}{2}$$

Relação com o módulo:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Assim:

$$\theta(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\sqrt{x^2} + 1\right)$$

Aproximação Gaussiana para a Delta

Considere a **Gaussiana** (distribuição normal):

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Propriedades:

- Normalizada: $\int_{-\infty}^{\infty} G_\sigma(x)\,dx = 1$
- Simétrica: $G_\sigma(-x) = G_\sigma(x)$
- Quando $\sigma \to 0$, $G_\sigma(x)$ fica **mais estreita e mais alta**, concentrando-se em $x = 0$.

Demonstração da Propriedade de Filtragem

Para qualquer função $f(x)$ com série de Taylor:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots$$

Temos:

$$\lim_{\sigma \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} G_\sigma(x) f(x)\,dx = f(0)$$

Por quê?

- Termos ímpares se anulam por simetria (função par vezes função ímpar).
- Termos pares são proporcionais a potências positivas de σ, então vão a zero.
- Apenas o termo constante $f(0)$ sobrevive.

Funções de Green em 1D

A **função de Green** em 1D satisfaz:

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, x_0) = \delta(x - x_0)$$

A solução é:

$$\boxed{G(x, x_0) = \frac{1}{2}|x - x_0|}$$

Dependência com a Dimensão

A função de Green depende da dimensionalidade do espaço:

Dimensão	Função de Green	Comportamento
1D	$\frac{1}{2}\lvert x - x_0\rvert$	Cresce com a distância
2D	$\frac{1}{2\pi}\log\lvert x - x_0\rvert$	Cresce logarithmicamente
3D	$\frac{1}{4\pi\lvert x - x_0\rvert}$	Decai como $1/r$

Interpretação Física

- **Funções delta** representam **partículas pontuais** ou **impulsos instantâneos**.
- São **limites** de processos físicos suaves (ex.: aceleração instantânea é o limite de uma aceleração muito grande em um tempo muito curto).
- Isso é análogo a definir **números irracionais** como limites de sequências de números racionais.

O Truque do Cálculo da Integral Gaussiana

Para provar a normalização da Gaussiana, usamos o truque das coordenadas polares:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2} dx\, dy$$

Em coordenadas polares (r, θ):

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2\sigma^2} r\, dr\, d\theta = 2\pi\sigma^2$$

Portanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \sqrt{2\pi}\,\sigma$$

Assim, o fator de normalização $1/\sqrt{2\pi}\sigma$ está correto.

Visualização: Sequência Delta Gaussiana

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-2, 2, 500)
sigmas = [1.0, 0.5, 0.2, 0.05]

plt.figure(figsize=(8, 5))
for sigma in sigmas:
    g = (1 / (np.sqrt(2 * np.pi) * sigma)) * np.exp(-(x**2) / (2 * sigma**2))
    plt.plot(x, g, label=f" = {sigma}")

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("G (x)")
plt.title("Sequência Delta Gaussiana")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

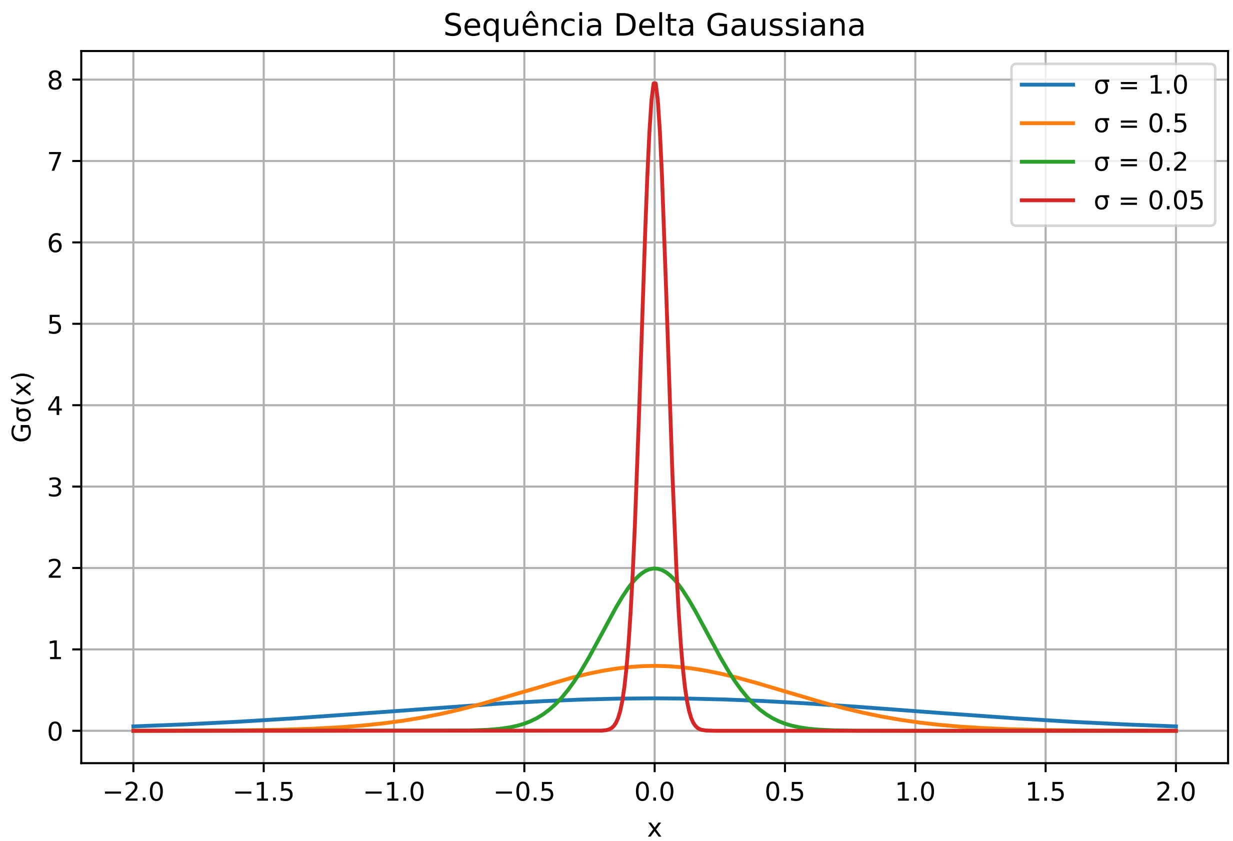

Figure 1: Aproximação gaussiana da delta de Dirac para diferentes valores de sigma