

Determinismo e Estatística

Sandro Vitenti

A Linguagem da Incerteza: O que é Estatística?

Se a matemática do contínuo (cálculo, geometria) é a linguagem natural do determinismo, descrevendo trajetórias exatas e forças precisas, a estatística é a linguagem que desenvolvemos para conversar com a incerteza.

Não usamos estatística apenas porque nossos instrumentos são imperfeitos. Em um nível fundamental, a natureza parece se recusar a dar respostas definitivas para certas perguntas. A pergunta “onde exatamente está o elétron *agora*?” pode não ter uma resposta. Em vez disso, a física nos oferece uma resposta diferente: “qual a probabilidade de encontrá-lo aqui ou ali se eu procurar?”.

A estatística, então, não é um paliativo para nossa ignorância; é o vocabulário necessário para descrever um aspecto intrínseco da realidade.

Dois Dialeto da Linguagem Estatística: Frequentista vs. Bayesiana

Ao adotar a linguagem estatística, encontramos dois dialetos principais, duas formas de interpretar o que a palavra probabilidade realmente significa.

A Visão Frequentista: A Probabilidade como Frequência de Ocorrência

- A Ideia Central: A probabilidade de um evento é a sua frequência relativa de ocorrência em um grande número de tentativas idênticas.
- Como Funciona: Imagine lançar uma moeda. A probabilidade de dar “cara” é $P = 0.5$ porque, após lançarmos a moeda N vezes (com N muito grande), esperamos encontrar aproximadamente $N/2$ caras. $P = (\text{Número de sucessos})/(\text{Número total de tentativas})$.
- O Conceito de Limite: Crucialmente, a probabilidade é definida como o limite da frequência relativa quando o número de tentativas tende ao infinito: $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$. Esta é uma idealização matemática: algo que supomos existir mas nunca podemos alcançar na prática. Nunca podemos realizar infinitas tentativas, mas observamos que as frequências relativas tendem a se estabilizar around um valor específico à medida que coletamos mais dados. Esta estabilidade das frequências é o que nos permite falar em “probabilidade” no sentido frequentista.
- O Foco: Está inteiramente nos dados coletados. É objetiva e baseada puramente na repetição.
- Limitação: Não é fácil aplicar a eventos únicos e não repetíveis. Qual é a probabilidade frequentista de um candidato específico ganhar uma eleição? A eleição só acontece uma vez. O frequentista diria que isso não é uma probabilidade, mas sim uma certeza que nós desconhecemos.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Configuração do experimento
np.random.seed(42) # Para reproducibilidade
n_lancamentos = 10000
moeda_justa = [0.5, 0.5] # Probabilidades: [0] = cara, [1] = coroa

# Simulação dos lançamentos
```

```

resultados = np.random.choice([0, 1], size=n_lancamentos, p=moeda_justa)
frequencias_relativas = np.cumsum(resultados) / np.arange(1, n_lancamentos + 1)

# Criação da figura
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(
    np.arange(1, n_lancamentos + 1),
    frequencias_relativas,
    alpha=0.7,
    linewidth=1,
    label="Frequência relativa acumulada",
)
plt.axhline(y=0.5, color="red", linestyle="--", label="Probabilidade teórica (0.5)")

# Detalhes estéticos
plt.xscale("log") # Escala log para melhor visualização do comportamento inicial
plt.xlabel("Número de lançamentos (escala logarítmica)")
plt.ylabel("Frequência relativa de caras")
plt.title("Convergência da frequência relativa para a probabilidade teórica")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.show()

```

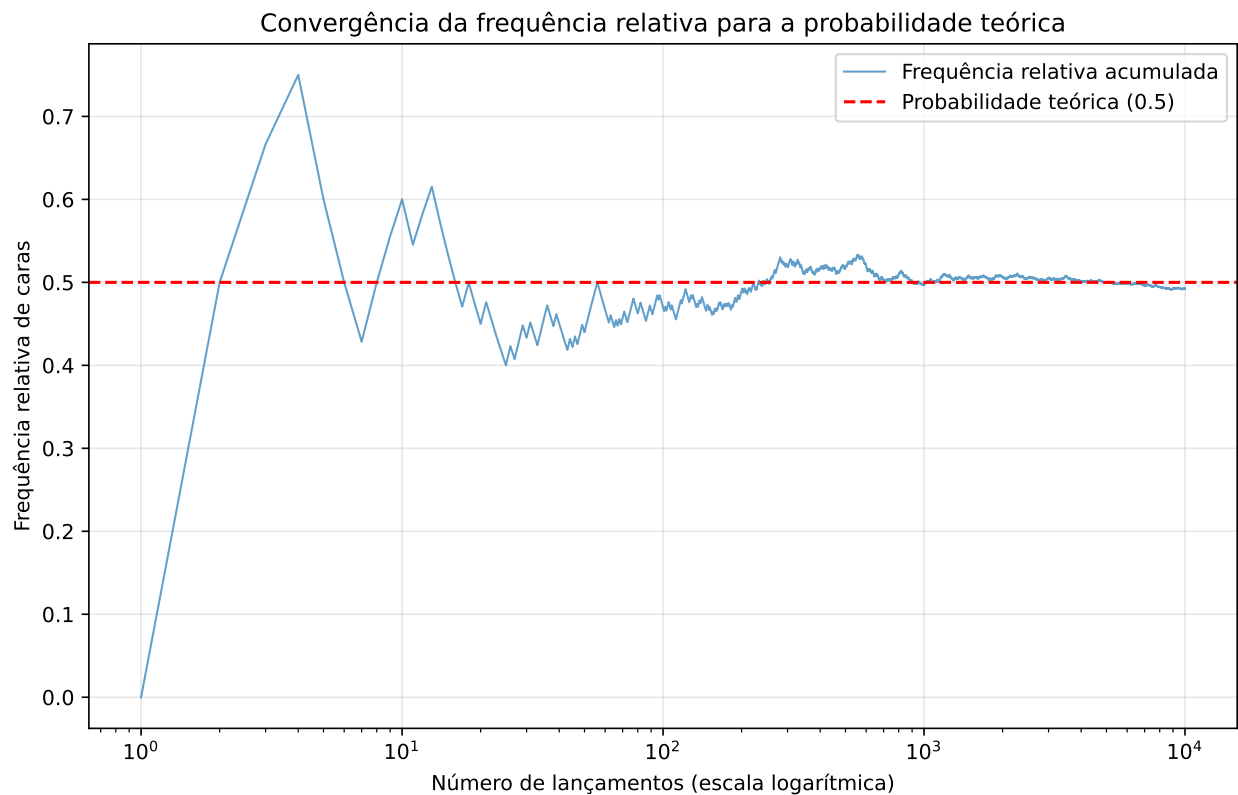


Figure 1: Convergência da frequência relativa de ‘caras’ para o valor teórico de 0.5

A Visão Bayesiana: A Probabilidade como Grau de Crença

- A Ideia Central: A probabilidade é uma medida do grau de crença ou grau de plausibilidade que temos em uma hipótese, com base no conhecimento disponível.
- Como Funciona: Começamos com uma probabilidade *a priori*: uma estimativa inicial de nossa crença. Então, coletamos dados. Por fim, usamos o Teorema de Bayes para atualizar nossa crença, calculando uma nova probabilidade *a posteriori*.
- Teorema de Bayes: A ferramenta fundamental para atualizar crenças é dada por:

$$P(H|D) = \frac{P(D|H) \cdot P(H)}{P(D)}$$

Onde:

- $P(H|D)$: Probabilidade a posteriori da hipótese H dado os dados D
- $P(D|H)$: Verossimilhança - probabilidade dos dados D se a hipótese H for verdadeira
- $P(H)$: Probabilidade a priori da hipótese H
- $P(D)$: Probabilidade total dos dados (constante de normalização)
- O Foco: Está na atualização do conhecimento. É subjetiva no sentido de que começa com um estado de conhecimento prévio, mas é completamente objetiva na forma como esse conhecimento deve ser atualizado diante de novos dados.
- Vantagem: É poderosa para lidar com eventos únicos, incorporar conhecimento prévio e aprender continuamente.

Exemplo Detalhado: Teste de Doença Rara

Contexto: Uma doença afeta 1% da população. Um teste tem 99% de precisão.

Definindo as variáveis:

- H : Hipótese de ter a doença
- $\neg H$: Hipótese de não ter a doença
- D : Dado do teste positivo

Probabilidades a priori:

- $P(H) = 0.01$ (1% da população tem a doença)
- $P(\neg H) = 0.99$ (99% não tem)

Verossimilhanças (acurácia do teste):

- $P(D|H) = 0.99$ (99% de chance de positivo se doente)
- $P(D|\neg H) = 0.01$ (1% de chance de falso positivo)

Probabilidade total dos dados ($P(D)$):

$$P(D) = P(D|H) \cdot P(H) + P(D|\neg H) \cdot P(\neg H)$$

$$P(D) = (0.99 \times 0.01) + (0.01 \times 0.99) = 0.0099 + 0.0099 = 0.0198$$

Aplicando o Teorema de Bayes:

$$P(H|D) = \frac{P(D|H) \cdot P(H)}{P(D)} = \frac{0.99 \times 0.01}{0.0198} = \frac{0.0099}{0.0198} = 0.5$$

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Dados do problema
P_H = 0.01 # Probabilidade a priori de ter a doença
P_negH = 0.99 # Probabilidade a priori de não ter a doença
P_D_dado_H = 0.99 # Probabilidade de teste positivo se estiver doente
P_D_dado_negH = 0.01 # Probabilidade de teste positivo se não estiver doente

# Calculando a probabilidade total P(D)
P_D = (P_D_dado_H * P_H) + (P_D_dado_negH * P_negH)

# Calculando a probabilidade a posteriori P(H|D)
P_H_dado_D = (P_D_dado_H * P_H) / P_D

# Criando visualização
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 5))

# Gráfico 1: Probabilidades a priori
labels_priori = ["Tem a doença", "Não tem a doença"]
values_priori = [P_H, P_negH]
colors_priori = ["lightcoral", "lightblue"]

ax1.pie(
    values_priori,
    labels=labels_priori,
    autopct="%1.1f%%",
    colors=colors_priori,
    startangle=90,
)
ax1.set_title("Probabilidades a Priori\n(antes do teste)")

# Gráfico 2: Probabilidades a posteriori
labels_posteriori = [
    "Tem a doença\n(dado positivo)",
    "Não tem a doença\n(dado positivo)",
]
values_posteriori = [P_H_dado_D, 1 - P_H_dado_D]

ax2.pie(
    values_posteriori,
    labels=labels_posteriori,
    autopct="%1.1f%%",
    colors=colors_priori,
    startangle=90,
)
ax2.set_title("Probabilidades a Posteriori\n(após teste positivo)")

plt.tight_layout()
plt.show()

print(f"Probabilidade a posteriori P(H|D) = {P_H_dado_D:.3f} ({P_H_dado_D*100:.1f}%)")

```

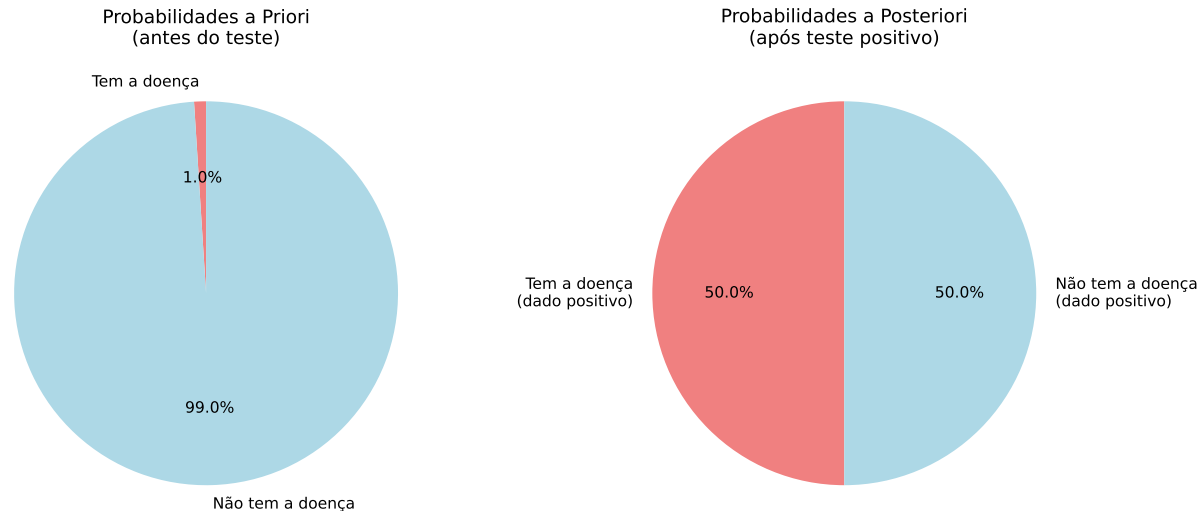


Figure 2: Análise Bayesiana do teste de doença

Probabilidade a posteriori $P(H|D) = 0.500$ (50.0%)

Interpretação do Resultado: Apesar do teste ter 99% de precisão, a probabilidade de realmente ter a doença após um teste positivo é de apenas 50%. Isso ocorre porque a doença é muito rara (apenas 1% da população), então mesmo com uma baixa taxa de falsos positivos (1%), o número absoluto de falsos positivos é similar ao número de verdadeiros positivos.

A visão Bayesiana nos ensina que dados não falam por si só - eles só ganham significado quando interpretados à luz do conhecimento prévio existente.

Exercícios

1. Explique em palavras simples a diferença entre a interpretação frequentista e bayesiana de probabilidade.
2. Considere o lançamento de uma moeda justa 1000 vezes. Calcule a frequência relativa de “caras” se forem observadas 510 ocorrências. Compare com a probabilidade teórica.
3. Uma doença afeta 2% da população. Um teste tem 95% de acerto tanto para positivos quanto para negativos. Calcule a probabilidade de realmente estar doente dado que o teste deu positivo, usando o Teorema de Bayes.
4. Suponha que você lance uma moeda 10 vezes e observe apenas uma vez cara. Qual seria a interpretação frequentista e bayesiana da probabilidade de sair cara?
5. Discuta por que o enfoque bayesiano é mais adequado para eventos únicos, como a eleição de um candidato ou previsão de desastres naturais.

Distribuição de Probabilidade vs Probabilidade: A Importância da Medida

Até agora, trabalhamos com espaços de estados discretos (cara/coroa, doente/saudável). Mas na física, frequentemente lidamos com espaços contínuos, como a posição de uma partícula ao longo de uma linha.

Aqui surge uma diferença fundamental: em espaços contínuos, a probabilidade de qualquer estado específico é zero.

Por que probabilidade zero não significa impossibilidade?

Considere uma partícula que pode estar em qualquer ponto do intervalo $[0, 1]$. Se atribuíssemos probabilidades iguais a cada ponto, teríamos um paradoxo:

- Probabilidade de cada ponto: $P(x) = \frac{1}{\infty} = 0$

- Mas a probabilidade total no intervalo: $\sum_{x=0}^1 P(x) = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

Isso viola o axioma fundamental de que a probabilidade total deve ser 1!

A Solução: Densidade de Probabilidade

A solução matemática é trabalhar não com probabilidades de pontos, mas com probabilidades de intervalos. Introduzimos uma função densidade de probabilidade $\rho(x)$ tal que:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Propriedades fundamentais:

1. $\rho(x) \geq 0$ para todo x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$

A probabilidade de encontrar a partícula exatamente no ponto x é:

$$P(x = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} \rho(x) dx = 0.$$

Mas a densidade $\rho(x_0)$ nos diz o quão “provável” é a vizinhança de x_0 .

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

# Configuração
np.random.seed(42)
x = np.linspace(-4, 4, 1000)
dx = x[1] - x[0]

# Duas distribuições normais com diferentes variâncias
rho1 = norm.pdf(x, 0, 0.5) # Distribuição mais concentrada
rho2 = norm.pdf(x, 0, 1.0) # Distribuição mais espalhada

# Cálculo de probabilidades em intervalos
intervalo = [-1, 1]
prob1 = np.sum(rho1[(x >= intervalo[0]) & (x <= intervalo[1])]) * dx
prob2 = np.sum(rho2[(x >= intervalo[0]) & (x <= intervalo[1])]) * dx

# Visualização
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 5))

# Gráfico das densidades
ax1.plot(x, rho1, "b-", linewidth=2, label="(x) concentrada (\sigma=0.5)")
ax1.plot(x, rho2, "r-", linewidth=2, label="(x) espalhada (\sigma=1.0)")
ax1.fill_between(
    x[(x >= intervalo[0]) & (x <= intervalo[1])],
    rho1[(x >= intervalo[0]) & (x <= intervalo[1])],
    alpha=0.3,
    color="blue",
)
ax1.fill_between(
    x[(x >= intervalo[0]) & (x <= intervalo[1])],
```

```

    rho2[(x >= intervalo[0]) & (x <= intervalo[1])],
    alpha=0.3,
    color="red",
)
ax1.set_xlabel("Posição (x)")
ax1.set_ylabel("Densidade de probabilidade (x)")
ax1.set_title("Densidades de Probabilidade")
ax1.legend()
ax1.grid(True, alpha=0.3)

# Gráfico de barras das probabilidades
labels = [f"P({intervalo[0]} x {intervalo[1]})"]
width = 0.35
x_pos = np.arange(len(labels))

ax2.bar(
    x_pos - width / 2,
    [prob1],
    width,
    label="Distribuição concentrada",
    color="blue",
    alpha=0.7,
)
ax2.bar(
    x_pos + width / 2,
    [prob2],
    width,
    label="Distribuição espalhada",
    color="red",
    alpha=0.7,
)
ax2.set_ylabel("Probabilidade")
ax2.set_title("Probabilidades no Intervalo [-1, 1]")
ax2.set_xticks(x_pos)
ax2.set_xticklabels(labels)
ax2.legend()
ax2.grid(True, alpha=0.3)

plt.tight_layout()
plt.show()

print(f"Probabilidade no intervalo [-1, 1]:")
print(f"Distribuição concentrada: {prob1:.3f}")
print(f"Distribuição espalhada: {prob2:.3f}")

```

```

<>:23: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
<>:24: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
<>:23: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
<>:24: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
/tmp/ipykernel_3047/3023404317.py:23: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
    ax1.plot(x, rho1, "b-", linewidth=2, label="(x) concentrada (\sigma=0.5)")
/tmp/ipykernel_3047/3023404317.py:24: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
    ax1.plot(x, rho2, "r-", linewidth=2, label="(x) espalhada (\sigma=1.0)")

```

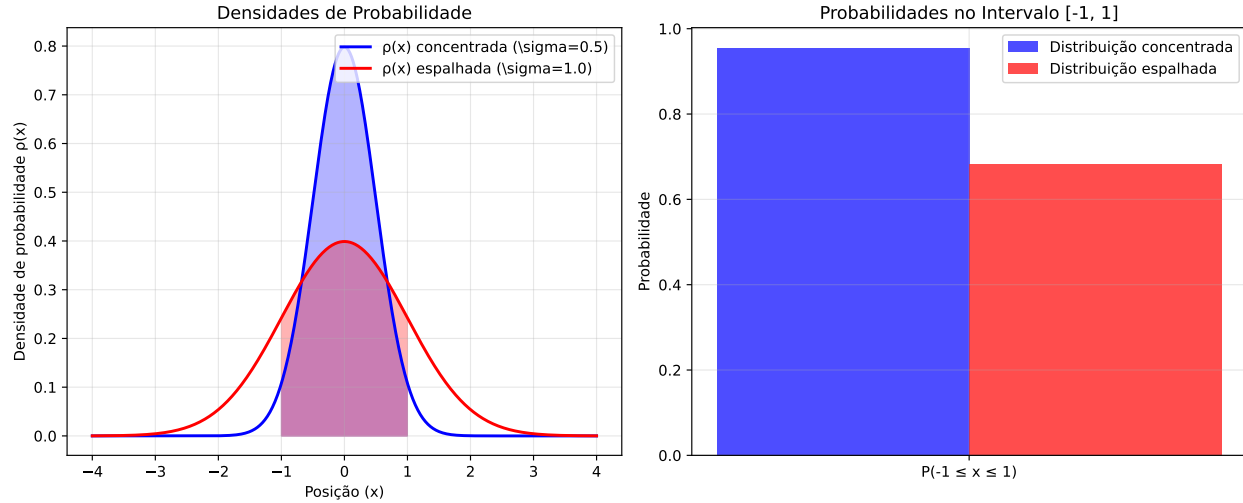


Figure 3: Ilustração da diferença entre probabilidade e densidade de probabilidade

Probabilidade no intervalo $[-1, 1]$:

Distribuição concentrada: 0.955

Distribuição espalhada: 0.683

Interpretação Física Crucial

1. $\rho(x)$ não é uma probabilidade: É uma densidade. Suas unidades são [probabilidade/comprimento].
2. Apenas integrais de $\rho(x)$ têm significado probabilístico: $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \rho(x) dx$.
3. Valores relativos importam: $\rho(x_2) > \rho(x_1)$ significa que intervalos infinitesimais around x_2 são mais prováveis que around x_1 .

Esta transição conceitual é fundamental para a mecânica quântica, onde a função de onda $\psi(x)$ está relacionada à densidade de probabilidade por:

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2.$$

Apesar de $\psi(x)$ poder ter valores em qualquer ponto, apenas integrais de $|\psi(x)|^2$ sobre intervalos finitos têm interpretação probabilística direta.

Exercícios

1. Explique em palavras a diferença entre probabilidade em um espaço discreto e densidade de probabilidade em um espaço contínuo.
2. Considere uma distribuição normal $N(0, 1)$. Calcule a probabilidade de a variável estar no intervalo $[-1, 1]$ usando a integral da densidade. (avanzado)
3. Duas distribuições normais têm médias iguais a 0, mas desvios-padrão diferentes: $\sigma_1 = 0.5$ e $\sigma_2 = 1.0$. Compare as probabilidades de estar no intervalo $[-1, 1]$. Explique qualitativamente por que elas diferem.
4. Por que a probabilidade de a partícula estar exatamente em x_0 é zero, mesmo que $\rho(x_0)$ seja grande?
5. Em mecânica quântica, a função de onda $\psi(x)$ define a densidade de probabilidade $\rho(x) = |\psi(x)|^2$. Discuta a importância de integrar $\rho(x)$ sobre um intervalo finito em vez de olhar para um ponto específico.

Do Estado Determinístico à Descrição Probabilística

O Espaço de Estados e o Determinismo Clássico

Na mecânica newtoniana, o estado completo de uma partícula em 1D é descrito por duas variáveis: posição x e velocidade v (ou momento $p = mv$). Juntas, elas definem um ponto no espaço de fase (x, p) .

A evolução temporal é governada pelas leis de Newton:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dp}{dt} = F(x)$$

Se conhecermos exatamente o estado inicial (x_0, p_0) no instante t_0 , podemos (em princípio) determinar univocamente o estado $(x(t), p(t))$ em qualquer instante futuro ou passado. Esta é a essência do determinismo laplaciano.

A Quebra Prática do Determinismo

Na prática, no entanto, nunca conhecemos o estado inicial com precisão infinita:

1. Limitações instrumentais: Medidas sempre têm incertezas experimentais
2. Preparação imperfeita: Sistemas reais nunca estão perfeitamente isolados
3. Complexidade: Sistemas com muitas partículas são praticamente intratáveis

Mais fundamentalmente, na mecânica quântica, o próprio princípio da incerteza de Heisenberg proíbe o conhecimento simultâneo e exato de x e p .

A Necessidade da Descrição Probabilística

Diante dessa impossibilidade prática (e fundamental) de determinar o estado exato, adotamos uma descrição probabilística:

Em vez de um ponto (x_0, p_0) no espaço de fase, temos uma distribuição de probabilidade $\rho(x, p, t_0)$ que representa nosso conhecimento sobre o estado do sistema.

Interpretação: $\rho(x, p, t_0) dx dp$ representa a probabilidade de encontrar o sistema em um elemento infinitesimal do espaço de fase around do ponto (x, p) no instante t_0 .

Evolução Temporal da Distribuição

A grande vantagem desta abordagem é que podemos evoluir temporalmente toda a distribuição:

Dada $\rho(x, p, t_0)$, a distribuição em qualquer instante posterior t é determinada pela dinâmica subjacente:

$$\rho(x, p, t) = \rho(x_0(x, p, t), p_0(x, p, t), t_0)$$

onde $(x_0(x, p, t), p_0(x, p, t))$ é o estado inicial que evolui para (x, p) no tempo t (seguindo as leis de Newton).

Exercícios

1. Explique por que, mesmo na mecânica clássica, é necessário usar uma descrição probabilística na prática.
2. Para uma partícula em 1D com distribuição de probabilidade inicial $\rho(x, p, 0)$, descreva qualitativamente como essa distribuição evolui ao longo do tempo.
3. Considere uma distribuição gaussiana inicial em x com momento p fixo. Escreva a expressão da distribuição $\rho(x, p, t)$ em função do tempo, assumindo movimento livre (sem forças).
4. Por que conhecer apenas o estado inicial médio $(\langle x_0 \rangle, \langle p_0 \rangle)$ não é suficiente para prever com precisão o comportamento de um sistema probabilístico?

Exemplo Concreto: Cinemática 1D com Incertezas

Caso 1: Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

Suponha uma partícula com velocidade constante v , mas com posição inicial incerta:

- Equação de movimento: $x(t) = x_0 + vt$
- Incerteza inicial: $x_0 = 1.0 \pm 0.2$ m (distribuição uniforme)
- Velocidade: $v = 2.0$ m/s (conhecida exatamente)

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parâmetros
v = 2.0 # m/s
x0_min, x0_max = 0.8, 1.2 # intervalo inicial de posição
t = np.linspace(0, 2, 100) # 0 a 2 segundos

# Evolução da incerteza
x_min = x0_min + v * t
x_max = x0_max + v * t

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.fill_between(t, x_min, x_max, alpha=0.3, label="Zona de incerteza")
plt.plot(t, (x0_min + x0_max) / 2 + v * t, "r-", linewidth=2, label="Trajetória média")
plt.xlabel("Tempo (s)")
plt.ylabel("Posição (m)")
plt.title("Evolução da Incerteza no Movimento Retilíneo Uniforme")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.show()

```

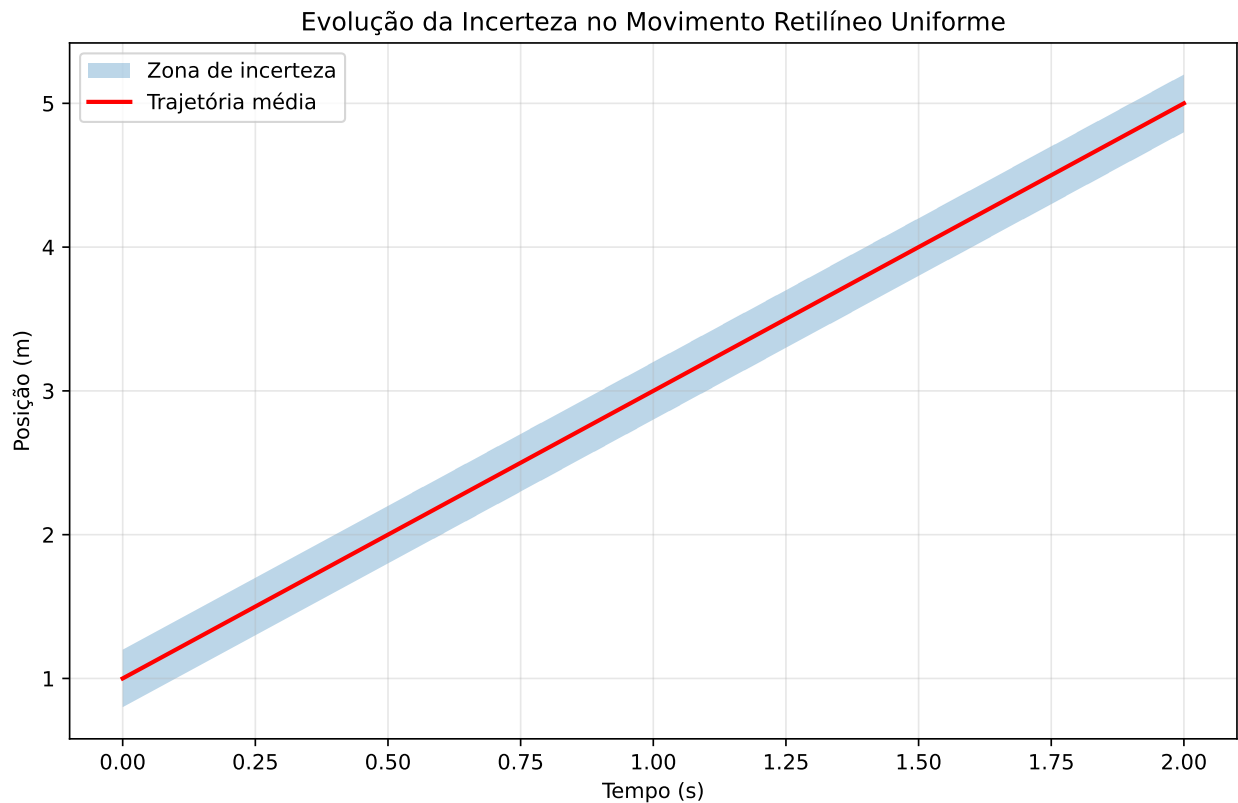


Figure 4: Evolução da incerteza posicional no MRU

Interpretação: A incerteza inicial de $\pm 0.2\text{m}$ se propaga sem amplificação: a largura da distribuição permanece constante no tempo.

Caso 2: Movimento Uniformemente Acelerado (MUA)

Agora considere queda livre com aceleração constante, mas com incertezas tanto na posição quanto na velocidade iniciais:

- Equação de movimento: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
- Incertezas: $x_0 = 0 \pm 0.1$ m, $v_0 = 0 \pm 0.2$ m/s
- Aceleração: $a = -9.8$ m/s²

```
# Parâmetros
a = -9.8 # m/s^2
x0_sigma = 0.1 # incerteza inicial na posição
v0_sigma = 0.2 # incerteza inicial na velocidade

# Tempo
t = np.linspace(0, 0.2, 100)

# Evolução da incerteza total (propagação de erros)
sigma_x = np.sqrt(x0_sigma**2 + (v0_sigma * t) ** 2 + (0.5 * a * t**2) ** 2)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(
    t, 0.5 * a * t**2, "b-", linewidth=2, label="Trajetória nominal ($x_0=0, v_0=0$)"
)
plt.fill_between(
    t,
    0.5 * a * t**2 - sigma_x,
    0.5 * a * t**2 + sigma_x,
    alpha=0.3,
    color="red",
    label="Zona de incerteza ($\pm\sigma$)",
)
plt.xlabel("Tempo (s)")
plt.ylabel("Posição (m)")
plt.title("Evolução da Incerteza no Movimento Uniformemente Acelerado")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.show()

print(f"Incerteza inicial: $\sigma_x$ = {x0_sigma:.3f} m")
print(f"Incerteza final (t=1s): $\sigma_x$ = {sigma_x[-1]:.3f} m")
```

```
<>:22: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\p'
<>:31: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
<>:32: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
<>:22: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\p'
<>:31: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
<>:32: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
/tmp/ipykernel_3047/3749421272.py:22: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\p'
    label="Zona de incerteza ($\pm\sigma$)",
/tmp/ipykernel_3047/3749421272.py:31: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
    print(f"Incerteza inicial: $\sigma_x$ = {x0_sigma:.3f} m")
/tmp/ipykernel_3047/3749421272.py:32: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\s'
    print(f"Incerteza final (t=1s): $\sigma_x$ = {sigma_x[-1]:.3f} m")
```

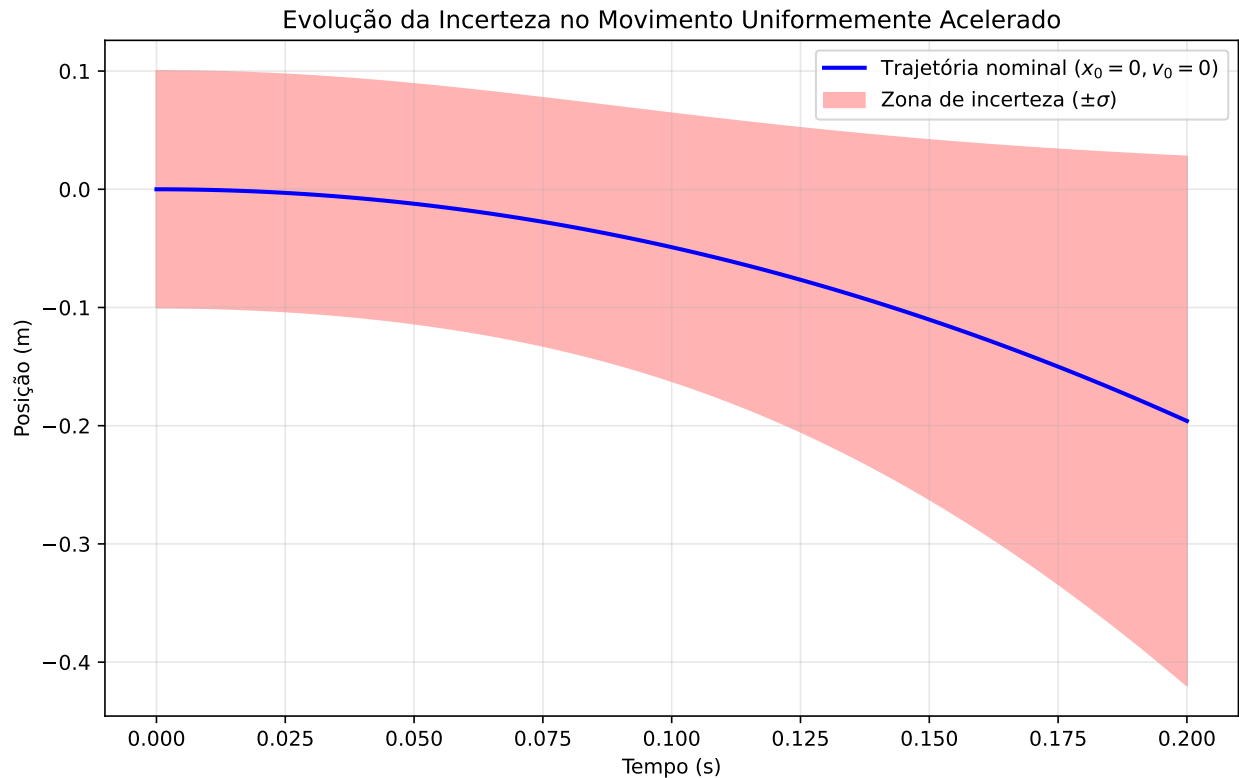


Figure 5: Evolução da incerteza no movimento uniformemente acelerado

Incerteza inicial: $\sigma_x = 0.100$ m

Incerteza final (t=1s): $\sigma_x = 0.224$ m

Interpretação: A incerteza cresce rapidamente com o tempo devido à contribuição da incerteza inicial na velocidade, que é amplificada pelo termo quadrático.

Lição Fundamental

Estes exemplos mostram que:

1. Mesmo com leis determinísticas, incertezas iniciais se propagam
2. A forma da propagação depende da dinâmica do sistema
3. Sistemas com não-linearidades (como o termo t^2) podem amplificar rapidamente incertezas iniciais

Esta é a ponte entre o determinismo das equações de Newton e a necessidade de descrições estatísticas na prática experimental!

Exemplo Concreto: Oscilador Harmônico

Neste exemplo, vamos estudar o comportamento de um oscilador harmônico com incertezas iniciais na posição e na velocidade.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
from scipy.stats import multivariate_normal
```

```
# Sistema físico: oscilador harmônico
```

```

def oscilador_harmonico(estados, t):
    x, p = estados
    k = 1.0 # constante elástica
    m = 1.0 # massa
    dxdt = p / m
    dpdt = -k * x
    return [dxdt, dpdt]

# Condição inicial (distribuição)
x0, p0 = 1.0, 0.0 # centro da distribuição
sigma_x, sigma_p = 0.2, 0.3 # incertezas iniciais

# Tempos para evolução
t = np.linspace(0, 2 * np.pi, 5) # Um período completo

# Criar grid no espaço de fase
x = np.linspace(-2, 2, 100)
p = np.linspace(-2, 2, 100)
X, P = np.meshgrid(x, p)

# Visualização
fig, axes = plt.subplots(1, len(t), figsize=(14, 4))
fig.suptitle("Evolução Temporal de uma Distribuição no Espaço de Fase", fontsize=14)

for i, time in enumerate(t):
    # Para cada tempo, evoluir a distribuição
    # (Aproximação: para sistema linear, a distribuição gaussiana permanece gaussiana)
    # Calcular a evolução do centro da distribuição
    estados_evoluidos = odeint(oscilador_harmonico, [x0, p0], [0, time])[-1]
    x_evol, p_evol = estados_evoluidos

    # Distribuição no tempo t (aproximação)
    pos = np.dstack((X, P))
    cov = [[sigma_x**2, 0], [0, sigma_p**2]] # Matriz de covariância
    rho = multivariate_normal([x_evol, p_evol], cov).pdf(pos)

    # Plot
    ax = axes[i]
    contour = ax.contourf(X, P, rho, levels=20, cmap="viridis")
    ax.set_xlabel("Posição (x)")
    if i == 0:
        ax.set_ylabel("Momento (p)")
    ax.set_title(f"t = {time:.2f}")
    ax.grid(True, alpha=0.3)
    ax.set_xlim(-2, 2)
    ax.set_ylim(-2, 2)

plt.tight_layout()
plt.show()

```

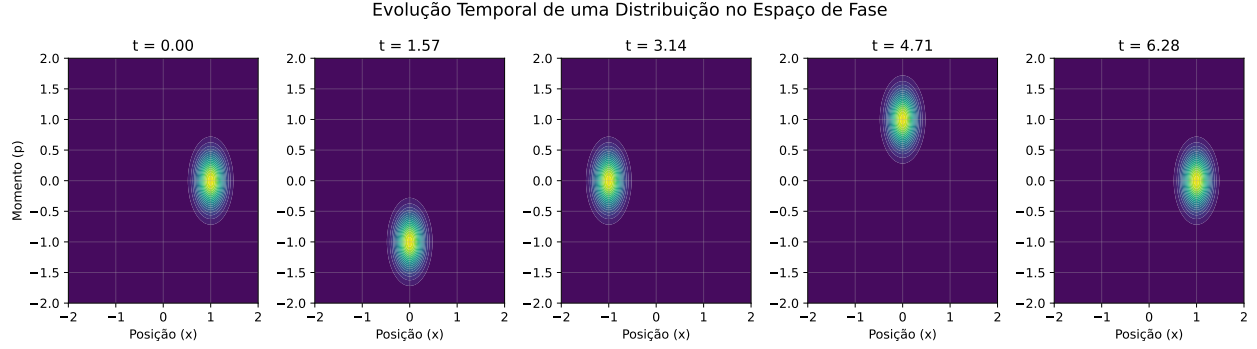


Figure 6: Evolução temporal de uma distribuição no espaço de fase

Implicações Fundamentais

1. Determinismo vs. Previsibilidade: Embora a dinâmica subjacente seja determinística, nossa capacidade de previsão é limitada pela incerteza inicial.
2. Espalhamento da Informação: Em sistemas caóticos, pequenas incertezas iniciais crescem exponencialmente, limitando drasticamente o horizonte de previsibilidade.
3. Conexão com Mecânica Quântica: Na MQ, a função de onda $\psi(x)$ vive em um espaço de Hilbert, mas a densidade de probabilidade $|\psi(x)|^2$ representa nossa informação sobre o sistema, de forma análoga à $\rho(x, p)$ na física clássica.

Esta transição do ponto no espaço de fase para distribuições de probabilidade marca a passagem fundamental do determinismo ideal para a descrição estatística prática que permeia toda a física moderna.

Exercícios

1. No MRU do exemplo, explique por que a largura da zona de incerteza permanece constante ao longo do tempo, enquanto no MUA ela cresce.
2. Para o MUA, derive a expressão da incerteza $\sigma_x(t)$ considerando incertezas iniciais em x_0 e v_0 e compare com a aproximação mostrada no gráfico.
3. No oscilador harmônico, explique por que uma distribuição gaussiana inicial permanece aproximadamente gaussiana ao longo do tempo.
4. Discuta qualitativamente como o espalhamento da distribuição no espaço de fase muda se a constante elástica k ou a massa m forem alteradas.

A Mecânica Quântica e a Natureza Intrinsecamente Probabilística da Realidade

Tudo que discutimos até agora pode ser visto como uma “correção prática” ao determinismo: não sabemos medir perfeitamente, então usamos estatística. Mas a Mecânica Quântica (MQ) traz uma revolução muito mais profunda.

A Quebra Fundamental do Determinismo

Na MQ, mesmo em condições ideais, com instrumentos perfeitos:

- O Princípio da Incerteza de Heisenberg proíbe o conhecimento simultâneo e exato de posição e momento:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Isso não é uma limitação tecnológica; é uma propriedade fundamental da natureza.

- O resultado de uma medida individual é fundamentalmente imprevisível. Podemos saber tudo que é possível saber sobre um sistema (sua função de onda $\psi(x)$) e ainda assim só poder prever probabilidades para o resultado de uma medida.

A Função de Onda: Uma Entidade Probabilística

O estado de um sistema quântico é descrito pela função de onda $\psi(x)$, uma entidade matemática complexa. A interpretação física foi proposta por Max Born:

$$|\psi(x)|^2 dx = \text{Probabilidade de encontrar a partícula entre } x \text{ e } x + dx$$

A evolução temporal de $\psi(x)$ é governada pela Equação de Schrödinger, uma equação diferencial perfeitamente determinística. Apesar disso, os resultados de medições individuais são fundamentalmente probabilísticos.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parâmetros do pacote de onda gaussiano
x0 = 0.0 # Centro do pacote
sigma = 0.5 # Largura
k0 = 5.0 # Número de onda médio

# Espaço de configuração
x = np.linspace(-2, 2, 1000)

# Função de onda: pacote gaussiano
psi = np.exp(-((x - x0) ** 2) / (2 * sigma**2)) * np.exp(1j * k0 * x)
psi_real = np.real(psi)
psi_imag = np.imag(psi)
psi_mod_sq = np.abs(psi) ** 2 # Densidade de probabilidade

# Normalização para melhor visualização
psi_real /= np.max(np.abs(psi_real))
psi_imag /= np.max(np.abs(psi_imag))
psi_mod_sq /= np.max(psi_mod_sq)

# Plot
plt.figure(figsize=(10, 6))

plt.plot(x, psi_real, "b-", linewidth=2, label="Parte real [Re( x)]")
plt.plot(x, psi_imag, "r-", linewidth=2, label="Parte imaginária [Im( x)]")
plt.plot(x, psi_mod_sq, "k-", linewidth=2, label="Densidade de probabilidade [| (x)|²]")

plt.xlabel("Posição (x)")
plt.ylabel("Amplitude (normalizada)")
plt.title("Função de Onda Quântica e sua Densidade de Probabilidade")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.show()
```

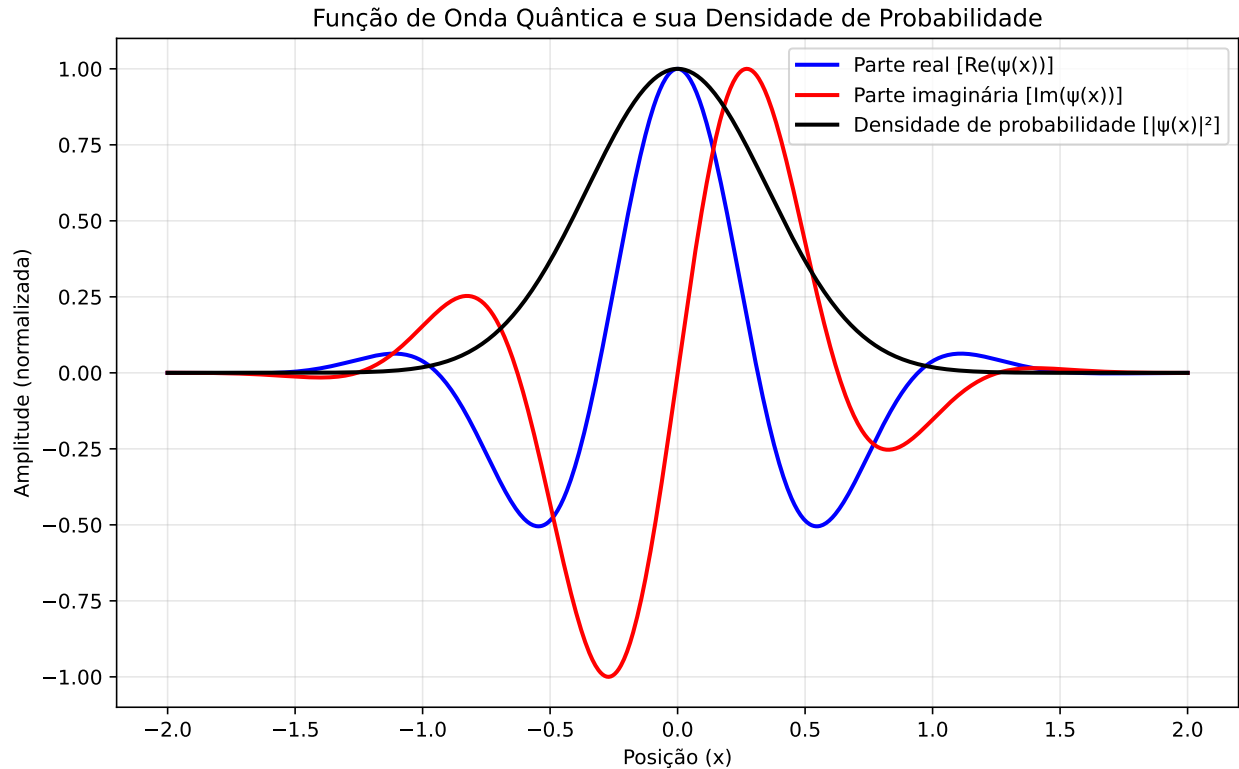


Figure 7: Partes real e imaginária, e módulo ao quadrado de um pacote de onda gaussiano

Interpretação Física

- Partes Real e Imaginária: Componentes matemáticas da função de onda. Não são diretamente mensuráveis.
- Módulo Quadrado ($|\psi(x)|^2$): Densidade de probabilidade fisicamente mensurável. Representa a probabilidade por unidade de comprimento de encontrar a partícula na posição x .

O Papel da Equação de Schrödinger

A equação:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t)$$

determina deterministicamente como $\psi(x, t)$ evolui no tempo. No entanto, o que esta equação evolui é uma distribuição de probabilidade.

Esta combinação - equação de evolução determinística para uma entidade probabilística - constitui a base conceitual da mecânica quântica.

A Relação Determinismo-Estatística

A MQ nos apresenta um contraste definitivo:

- A equação de evolução (Schrödinger) é perfeitamente determinística.
- Os resultados das medições são intrinsecamente probabilísticos.

Portanto, a MQ é a realização máxima do tema desta aula: o casamento inevitável entre o determinismo das leis fundamentais e a estatística necessária para descrever os fenômenos mensuráveis.

Ela eleva a estatística de uma ferramenta para lidar com nossa ignorância a um marco central da descrição da realidade física.

Conclusão: Do Micro ao Macro, uma Única Linguagem

Da trajetória de um planeta (onde erros iniciais se amplificam) à posição de um elétron (onde a probabilidade é inerente), passando por testes médicos e previsões do tempo, encontramos uma mesma linguagem: a linguagem das probabilidades.

O determinismo nos diz como as possibilidades evoluem; a estatística nos diz como lidar com qual possibilidade se realizará.

Exercícios

1. Uma função de onda normalizada satisfaz $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$. Por que isso é necessário?
2. Compare a densidade de probabilidade quântica $|\psi(x)|^2$ com a distribuição clássica de probabilidade $\rho(x, p)$ discutida nos exemplos anteriores.
3. Discuta como o Princípio da Incerteza de Heisenberg limita a precisão com que podemos conhecer simultaneamente x e p , mesmo que a função de onda seja perfeitamente conhecida.
4. Imagine medir a posição de um elétron repetidamente em um estado gaussiano. Qual distribuição você esperaria obter para os resultados experimentais? Explique.